



Rui Jorge Barros
Pereira

Análise estrutural de vigas *sandwich* de
alumínio-aglomerado de cortiça



Rui Jorge Barros
Pereira

Análise estrutural de vigas *sandwich* de alumínio-aglomerado de cortiça

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestrado em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica de Francisco José Malheiro Queirós de Melo, Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

O júri / The jury

Presidente / President

Prof. Doutor João Paulo Davim Tavares da Silva

Professor Associado com Agregação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Vogais / Committee

Prof. Doutor José Luís Soares Esteves

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (arguente)

Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo

Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro (orientador)

Agradecimentos / Acknowledgements

Agradeço ao meu orientador, Professor Francisco José Malheiro Queirós de Melo, por todo o apoio, disponibilidade e ensinamentos ao longo desta dissertação.

Aos meus amigos Nuno Oliveira, David Coelho, Carlos Sousa e Hugo Lourenço pela amizade e estarem sempre ao meu lado nesta caminhada.

Aos meus amigos da Residência de Estudantes de Santiago, por todos os momentos.

Aos meus amigos de Gualtar, pela força que sempre me deram.

À Annie, por toda a motivação, apoio incondicional e conforto, nos momentos mais desafiantes.

À minha irmã, pela amizade, apoio e encorajamento desde sempre.

Aos meus pais, por tudo. Por todo o amor, amizade e apoio ao longo da minha vida. Sem eles, isto não seria possível.

Palavras-chave

Sandwich; compósitos; Kirchhoff; matriz de rigidez; tensão de corte; elementos finitos; Abaqus.

Resumo

O estudo de vigas *sandwich* em que as peles (lâminas externas) são metálicas (correntemente em alumínio laminado) e o núcleo interno de material polimérico expandido (espuma de alta resistência) constitui um elemento de valor no projecto estrutural aplicado à construção de veículos de transporte, casos em que a relação rigidez/massa tem importância crítica. Daí a dedicada investigação no comportamento estrutural de componentes tipo placa fina ou casca fabricados por técnica *sandwich*. Este estudo baseia-se no desenvolvimento de modelos numéricos e experimentais, sendo o objectivo deste último a validação dos primeiros.

No caso de utilização de modelos numéricos existe um considerável número de técnicas de aproximação ao comportamento estrutural de vigas *sandwich* como elemento caracterizador de comportamentos mais complexos construídos sob a mesma técnica. Nesta dissertação, são recuperados os coeficientes e recalculados pelo procedimento conhecido como *Direct Stiffness Method* em que os coeficientes da matriz de rigidez são obtidos impondo deslocamentos ou rotações, tendo constrições devidamente incluídas nos elementos estruturais. Os esforços assim obtidos permitem o preenchimento da matriz de rigidez. Baseando o procedimento usado na determinação de tais coeficientes para vigas homogéneas, determinam-se neste trabalho coeficientes equivalentes mas para vigas compósitas tipo *sandwich*. A diferença entre módulos de Young entre as lâminas externas e o núcleo interno mostrou forte influência no afastamento entre os factores obtidos por elementos finitos (Abaqus) e os esperados pelos elementos de viga de Kirchhoff para vigas *sandwich*. Ao detectar tais desvios, uma tabela com factores de correcção foi proposta, em que os coeficientes da matriz de rigidez que segue o modelo de Euler-Bernoulli são modificados de modo a aproximarem-se dos coeficientes equivalentes obtidos com maior precisão através do Abaqus.

Keywords

Sandwich; composites; Kirchhoff; stiffness matrix; shear stress; finite elements; Abaqus.

Abstract

The study of sandwich beams in which the skins are metallic (commonly laminated aluminium) and the inner core of expanded polymer material (high strength foam) is an element of great value in the investigation of the structural behavior of thin plate or shell components manufactured by sandwich technique. This study is based on the development of numerical and experimental models, in which the objective of the last is the validation of the numerical model.

In the case of the numerical models, there are several approximation techniques to the structural behavior of sandwich beams as a defining characteristic of more complex behaviors built on the same technique. In this work, the stiffness matrix coefficients are recalculated by the procedure known as Direct Stiffness Method, where the coefficients of the stiffness matrix are obtained by imposing displacements or rotations, having properly included constrictions in the structural elements. The obtained stresses allow the assembly of the stiffness matrix. Basing the procedure used in determining such coefficients for homogeneous beams, the equivalent coefficients for sandwich composite beams are determined in this paper. The difference between Young's modulus of the outer plates and the inner core showed strong influence on the deviation of the coefficients obtained by finite elements (Abaqus) and the expected by the Kirchhoff beam elements for sandwich beams. On detecting such deviations, a table with correction factors was proposed, where current matrix elements for the conventional Euler - Bernoulli model are modified to better agree with the more accurately obtained equivalent factors by Abaqus.

Conteúdo

I	Enquadramento	1
1	Introdução	3
1.1	Objectivos	3
1.2	Guia de Leitura	3
2	Revisão do Estado da Arte	5
2.1	O conceito de determinação directa da matriz de rigidez de elementos de viga	5
2.2	<i>Direct stiffness method</i>	5
2.3	Estruturas <i>sandwich</i>	8
2.3.1	A origem da tecnologia <i>sandwich</i>	9
2.3.2	Considerações estruturais e modos de falha	9
2.3.3	Materiais utilizados	12
2.4	A cortiça	14
2.4.1	Produção, transformação e comercialização	14
2.4.2	Estrutura e composição da cortiça	15
2.4.3	Aplicações	16
2.4.4	Propriedades mecânicas	17
II	Métodos e Modelos	19
3	Modelos analíticos	21
3.1	Deformada segundo um polinómio cúbico	21
3.1.1	Caso de deslocamento imposto	22
3.1.2	Caso de rotação imposta	23
3.2	Curvatura de uma viga	24
3.2.1	Caso de viga compósita	25
3.3	Determinação de tensões de corte em vigas sob momento flector variável	27
3.3.1	Caso de viga homogénea	27
3.3.2	Caso de viga laminada: módulos de Young diferentes	28
3.4	Vibrações não amortecidas	31
3.4.1	Matriz de massa	31
4	Ensaaios Experimentais	33
4.1	Procedimento experimental	33

5	Modelação Numérica	35
5.1	Programa de simulação Abaqus	35
5.2	Análise de viga homogénea	35
5.2.1	Viga homogénea - 1 ^o Caso	36
5.2.2	Viga homogénea - 2 ^o Caso	37
5.2.3	Viga homogénea - Frequências naturais	38
5.3	Análise de viga <i>sandwich</i>	38
5.3.1	Viga <i>sandwich</i> - 1 ^o Caso	38
5.3.2	Viga <i>sandwich</i> - 2 ^o Caso	39
5.3.3	Viga <i>sandwich</i> - Frequências naturais	40
III	Resultados e Discussão	41
6	Resultados Experimentais	43
6.1	Primeira frequência natural da viga <i>sandwich</i>	43
7	Resultados Numéricos	45
7.1	Viga homogénea	45
7.1.1	Coefficientes da matriz de rigidez	45
7.1.2	Frequências naturais	46
7.2	Viga <i>sandwich</i> - diferentes núcleos	48
7.2.1	Coefficientes da matriz de rigidez	48
7.2.2	Tensão de corte	50
7.2.3	Tensão de Cedência de Von Mises	51
7.2.4	Frequências naturais	51
7.2.5	Outras soluções construtivas	52
8	Comparação e discussão dos resultados	53
8.1	Comparação dos resultados da viga homogénea	53
8.2	Comparação dos resultados da viga <i>sandwich</i>	55
8.3	Coefficientes de correção propostos	59
8.4	Conclusões finais	61
8.5	Propostas futuras	62
A	Códigos MatLab	65
A.1	Código para determinação dos coeficiente da matriz de rigidez da viga sandwich	65
A.2	Código para determinação das frequências naturais	66
B	Determinação dos coeficientes da viga <i>sandwich</i> alumínio - aglomerado de cortiça	69

Lista de Tabelas

2.1	Vantagens e desvantagens da estrutura <i>sandwich</i>	9
2.2	Tipos de adesivos e respectivas propriedades	13
2.3	Composição química da cortiça	16
5.1	Propriedades da malha na estrutura homogénea	36
5.2	Propriedades da malha na estrutura <i>sandwich</i>	39
7.1	Coefficientes teóricos da matriz de rigidez da viga homogénea.	45
7.2	Coefficientes numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga homogénea.	46
7.3	Erro na determinação das primeiras três frequências naturais.	47
7.4	Frequências naturais - Viga homogénea.	47
7.5	Coefficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga <i>sandwich</i> - $E_{nucleo} = 12$ MPa	48
7.6	Coefficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga <i>sandwich</i> - $E_{nucleo} = 30$ GPa	48
7.7	Coefficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga <i>sandwich</i> - $E_{nucleo} = 60$ GPa	49
7.8	Tensões máximas aplicadas no núcleo[MPa].	51
7.9	Frequências naturais - Viga <i>sandwich</i>	51
8.1	Comparação de resultados obtidos teoricamente e através do Abaqus para a viga homogénea.	53
8.2	Módulo de Young equivalente - viga homogénea.	54
8.3	Caso 1 - deslocamento forçado. Comparação de resultados obtidos analiticamente e através do Abaqus para outros valores de módulo de Young do núcleo.	55
8.4	Caso 2 - Rotação imposta. Comparação de resultados obtidos teoricamente e através do Abaqus para outros valores de módulo de Young do núcleo.	55
8.5	Módulo de Young equivalente - viga <i>sandwich</i>	57
8.6	Factores de correcção propostos.	58
8.7	Frequências naturais - Viga <i>sandwich</i>	58

Lista de Figuras

2.1	Deformadas associadas à activação de cada um dos graus de liberdade [3]	6
2.2	Componentes de uma estrutura <i>sandwich</i> [6].	8
2.3	Exemplo da eficiência estrutural de painéis <i>sandwich</i> [4].	8
2.4	Tecnologia <i>sandwich</i> na cápsula Apollo. [8]	10
2.5	Aplicação de painéis <i>sandwich</i> alumínio - aglomerado de cortiça. [10; 11] .	10
2.6	Modos de falha em estruturas <i>sandwich</i> [4]	11
2.7	Mapa de escolhas de materiais para vigas <i>sandwich</i> . EI = elastic indentation; MB/FY = microbuckling/face yield; CS = core shear; DI = ductile indentation; GFRP = glass fibre reinforced plastic; CFRP = carbon fibre reinforced plastic.[14]	12
2.8	Área de distribuição mundial do sobreiro [18]	14
2.9	Produção de cortiça [18]	15
2.10	Células de cortiça	15
2.11	Comportamento da cortiça natural à compressão e à tracção [17]	17
2.12	Comportamento do aglomerado de cortiça à compressão e à tracção [21] .	18
3.1	Caso de deslocamento imposto.	22
3.2	Caso de rotação imposta.	23
3.3	Curvatura da viga.	24
3.4	Tensões axiais numa fibra da viga.	25
3.5	Viga compósita - novas considerações.	25
3.6	Distribuição de tensões numa viga homogénea.	27
3.7	Distribuição de tensões numa viga laminada.	28
4.1	Pormenor do núcleo de alumínio no extremo encastrado.	33
4.2	Montagem experimental.	34
4.3	Osciloscópio utilizado na medição da onda.	34
5.1	Viga homogénea - 1º Caso.	36
5.2	Viga homogénea - 2º Caso.	37
5.3	As seis primeiras frequências e modos próprios - viga homogénea.	38
5.4	Deformada da viga <i>sandwich</i> - 1º Caso.	39
5.5	Viga <i>sandwich</i> - 2º Caso	39
5.6	As seis primeiras frequências e modos próprios - viga <i>sandwich</i>	40
6.1	Leitura do sensor piezoeléctrico.	43
7.1	Erro associado à determinação das primeiras três frequências naturais. . .	47

7.2	Comportamento da viga <i>sandwich</i> com o aumento do módulo de Young do material do núcleo no caso de deslocamento forçado.	49
7.3	Distribuição da tensão de corte no núcleo.	50
7.4	Distribuição da tensão de corte numa viga <i>sandwich</i>	50
7.5	Comportamento de uma viga <i>sandwich</i> celular segundo uma rotação imposta.	52
8.1	Comparação dos resultados da viga homogénea.	54
8.2	Comparação dos resultados da viga <i>sandwich</i> para diferentes núcleos - Caso de deslocamento forçado.	56
8.3	Comparação dos resultados da viga <i>sandwich</i> para diferentes núcleos - Caso de rotação imposta.	56
8.4	Módulo de Young equivalente - núcleo de 12.4 MPa.	57
8.5	Módulo de Young equivalente - núcleo de 30 GPa.	57
8.6	Factores de correcção propostos para diferentes valores do módulo de Young do núcleo.	59
8.7	Factores de correcção propostos para diferentes rácios de espessuras entre as peles e o núcleo.	60
B.1	Determinação do coeficiente K13.	69
B.2	Determinação do coeficiente K23.	70
B.3	Determinação do coeficiente K43.	71
B.4	Determinação do coeficiente K14.	72
B.5	Determinação do coeficiente K34.	72
B.6	Determinação do coeficiente K24.	73
B.7	Determinação do coeficiente K44.	74

Parte I

Enquadramento

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivos

O objectivo deste trabalho é de propor um modelo analítico que permita a obtenção da matriz de rigidez de vigas *sandwich*. Para formular tal modelo, baseado no procedimento usado na determinação dos coeficientes da matriz de rigidez para vigas homogéneas, será necessário considerar o tipo de construção, que neste caso é constituído por duas peles externas e um núcleo interno. O modelo de deformação é o de Euler - Bernoulli, onde a curvatura da viga é o principal parâmetro caracterizador do campo de deformações.

Para validar a formulação proposta será analisada também uma viga homogénea, por ser conhecido o seu comportamento e assim permitir a comparação constante com o caso particular de estrutura *sandwich*. A verificação dos coeficientes equivalentes será feita através do *Direct Stiffness Method*, onde os coeficientes são obtidos impondo deslocamentos ou rotações na estrutura utilizando para tal a ferramenta computacional Abaqus.

Sempre de forma semelhante, vão-se repetir os procedimentos para as estruturas compostas. Pelo facto do material do núcleo nestas estruturas apresentar uma rigidez menor, o efeito de corte tem influência no seu comportamento, e pretende-se então analisar tal fenómeno. Em caso de discrepância de valores entre os coeficientes serão propostos factores de correcção para que se aproximem do valor real.

Experimentalmente, pretende-se estudar a resposta dinâmica destas estruturas e determinar a primeira frequência natural, comparando o resultado com o valor teórico.

1.2 Guia de Leitura

Para além deste capítulo introdutório, este documento está organizado segundo os seguintes capítulos:

Capítulo 2 - Revisão do estado da arte

No segundo capítulo desta dissertação, procura-se enquadrar os conceitos relativos à determinação da matriz de rigidez, assim como o *Direct Stiffness Method*. Introduce-se também o conceito de estrutura *sandwich*, resumindo algumas propriedades destas estruturas e também os materiais mais comuns na sua construção.

Por fim, e sabendo que é o material fundamental neste estudo, descrevem-se as propriedades da cortiça, as suas aplicações, não esquecendo a importância deste material na economia do nosso país.

Capítulo 3 - Modelos analíticos

No terceiro capítulo apresentam-se os modelos analíticos utilizados. São explicados os modelos de determinação dos coeficientes da matriz de rigidez, em que se começa por estabelecer a relação entre a curvatura, a deformação e o momento, aplicados ao caso de viga *sandwich*. As tensões de corte presentes nestas estruturas também são abordadas neste capítulo. Na última secção é apresentado de forma resumida o problema dinâmico, nomeadamente a situação de não amortecimento.

Capítulo 4 - Ensaaios experimentais

Como o nome indica, aqui são expostos os procedimentos experimentais realizados. Nesta dissertação, a parte experimental incidiu sobre o comportamento dinâmico e teve como objectivo determinar as primeiras frequências naturais da viga *sandwich*.

Capítulo 5 - Modelação numérica

No quinto capítulo, explica-se a elaboração do modelo em *Abaqus* para os diferentes casos de prescrição de graus de liberdade. Em primeiro lugar, analisa-se uma viga homogénea de forma a comparar e validar o método, já que a formulação analítica que prevê o seu comportamento é conhecida. Depois vem o caso da viga *sandwich*, que possui características próprias.

Capítulo 6 - Resultados experimentais

São apresentados e analisados neste capítulo os resultados experimentais relativos às frequências naturais.

Capítulo 7 - Resultados numéricos

Neste capítulo apresentam-se e comparam-se os valores dos coeficientes da matriz de rigidez e das frequências naturais, obtidos analiticamente e obtidos a partir do *Abaqus*. São apresentados resultados para a viga homogénea, viga *sandwich* e outros casos de rigidez superior do núcleo ou construção celular. Apresenta-se também uma aproximação da distribuição das tensões de corte na estrutura *sandwich*.

Capítulo 8 - Comparação e discussão dos resultados

Finalmente, no último capítulo desta dissertação, comparam-se e criticam-se os resultados obtidos. De seguida apresentam-se as conclusões e possíveis propostas futuras.

Capítulo 2

Revisão do Estado da Arte

2.1 O conceito de determinação directa da matriz de rigidez de elementos de viga

Em análise estrutural, a matriz de rigidez é um elemento algébrico de grande importância na elaboração de programas de solução computacional. Em elementos de geometria simples, em que os graus de liberdade possam ser relativamente activados por regras cinemáticas simples, a determinação da matriz de rigidez de tais elementos é muito prática e compreensível, em vez de se usarem técnicas baseadas na variação de parâmetros definindo uma função potencial (normalmente a energia de deformação). Quando se referem regras cinemáticas simples, tal significa impor um determinado deslocamento (ou rotação) enquanto todos os outros ficam imobilizados. Este conceito, muito simples e sobejamente conhecido nos métodos elementares de análise estrutural, apresenta limitações e erros, quando se aplica a estruturas tipo *sandwich*, nomeadamente nos casos em que as peles são muito finas quando comparadas com a espessura do núcleo interior. A quantificação do erro e factores correctores para elementos de rigidez gerados de modo directo serão uns dos principais objectivos desta tese, como analisado a seguir.

2.2 *Direct stiffness method*

Entre 1934 e 1938 A. R. Collar e W. J. Duncan publicaram os primeiros artigos com a representação e terminologia para sistemas matriciais usados actualmente. A investigação na área continuou ao longo da segunda guerra mundial, mas restrições ao nível de publicação entre 1938 e 1947 dificultam o seu reconhecimento. O segundo maior avanço relativamente a sistemas matriciais de análise estrutural, ocorreu no período de 1954 a 1955, quando John H. Argyris sistematizou o conceito de agrupar componentes elementares de uma estrutura num sistema de equações. Finalmente, em 1959, M. J. Turner, enquanto investigador da Boeing, publicou um artigo a descrever o *Direct Stiffness Method* como um modelo eficiente para implementação computacional[1]. A seguinte descrição do método é baseada nos livros [2; 3].

O *Direct Stiffness Method* (*DSM*) ou *Matrix Stiffness Method*, é um método de análise estrutural que permite calcular a relação entre os carregamentos nodais e os respectivos graus de liberdade, recorrendo à matriz de rigidez do elemento. O *DSM* é a mais comum

implementação do MEF^1 , sendo que a maior parte dos softwares comerciais são baseados no mesmo.

Uma capacidade característica deste método é o processo de assemblagem em que a matriz de rigidez de uma estrutura é o resultado da soma de todas as matrizes de rigidez dos elementos da estrutura.

Resumidamente, para um dado elemento e , os carregamentos nodais f^e requeridos para manter o equilíbrio tendo em conta os seus graus de liberdade a^e , são dados pela equação matricial (2.1).

$$f^e = k^e a^e \quad (2.1)$$

Onde k^e representa a matriz de rigidez do elemento. Os carregamentos resultantes que actuam na estrutura completa, são representados pelo sistema de equações global e derivam da equação (2.1), sendo que:

$$f = \sum f^e = K a \quad (2.2)$$

Em que K representa a matriz de rigidez da estrutura completa e é resultado do somatório $K = \sum k^e$.

Para determinar os coeficientes da matriz de rigidez é necessário analisar casos elementares, prescrevendo deslocamentos ou rotações referentes aos graus de liberdade, um de cada vez, bloqueando todos os outros. A matriz de rigidez pode ser construída coluna a coluna. Considerando a coluna 1 de \mathbf{K} , a figura 2.1a mostra os carregamentos nodais

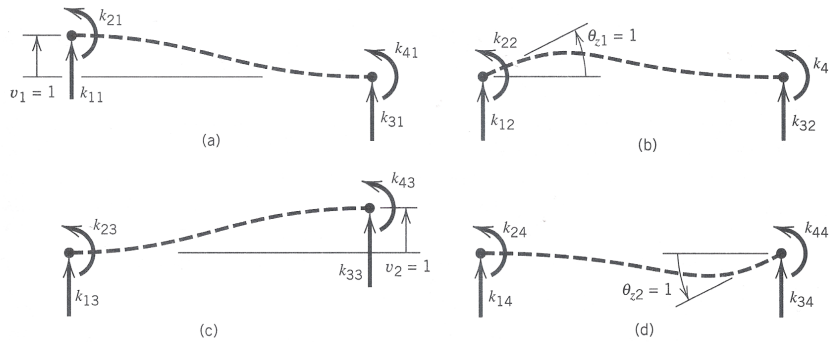


Figura 2.1: Deformadas associadas à activação de cada um dos graus de liberdade [3]

que são aplicados de modo a obter um estado de deformação onde o primeiro grau de liberdade tem valor unitário e todos os outros são zero. Claramente, nem todos os valores de k_{ij} podem ser positivos. Por exemplo, na figura 2.1a, as forças k_{11} e k_{31} são de sinal contrário de modo a preservar o equilíbrio das forças. Então, e de acordo com a equação

¹Método dos Elementos Finitos

2.2, vem que:

$$\begin{bmatrix} F_{y_i} \\ M_i \\ F_{y_j} \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Onde de acordo com a teoria de vigas, os coeficientes da matriz de rigidez correspondem aos seguintes:

$$\begin{bmatrix} F_{y_i} \\ M_i \\ F_{y_j} \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De modo a simplificar, os deslocamentos e as rotações, aplicaram-se apenas no extremo j . Sendo assim, trabalhou-se apenas com as colunas 3 e 4 de \mathbf{K} .

2.3 Estruturas *sandwich*

O conceito de estrutura *sandwich* envolve a combinação de elementos estruturais tipo placa fina ou espessa com adesão entre faces, através de uma camada de ligação que garanta a transferência de forças entre eles, como ilustrado na figura 2.2. Como resultado, obtém-se uma estrutura de elevada rigidez específica, tornando esta solução muito popular em aplicações de alto desempenho, tais como aeronáuticas, navais ou aeroespaciais. Benefícios adicionais como isolamento térmico e acústico podem também ser conseguidos, dependendo das características dos materiais utilizados [4; 5].

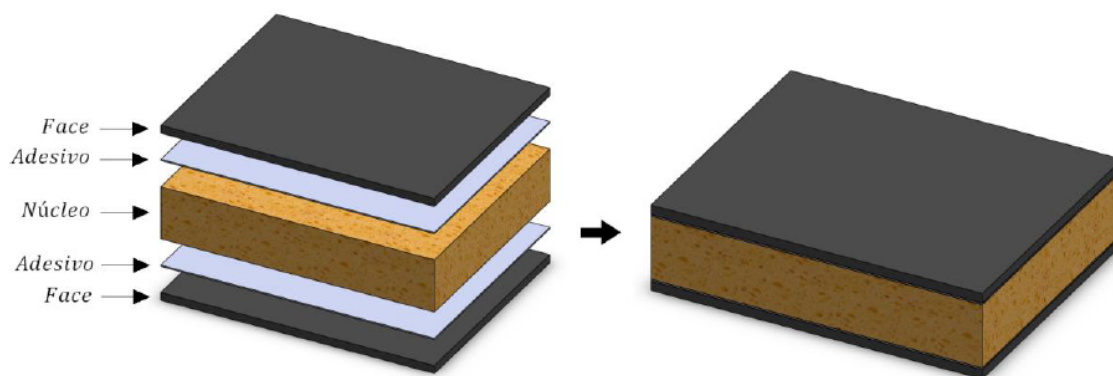


Figura 2.2: Componentes de uma estrutura *sandwich* [6].

Apesar de constituída por diferentes partes, a estrutura *sandwich* funciona com um todo. Os materiais são usados de forma eficiente, as peles são afastadas entre si, levando a um aumento do momento de inércia e consequentemente da sua rigidez. Devido a este aumento do momento de inércia, uma viga *sandwich* com as mesmas dimensões e peso que uma viga homogênea possui uma rigidez significativamente superior [7]. Na figura 2.3 pode-se constatar que a rigidez da estrutura aumenta em função do aumento da espessura do núcleo sem que haja uma variação significativa do peso.

	Solid Material	Core Thickness t	Core Thickness $3t$
Stiffness	1.0	7.0	37.0
Flexural Strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Figura 2.3: Exemplo da eficiência estrutural de painéis *sandwich* [4].

Uma grande variedade de estruturas podem ser obtidas combinando diferentes mate-

riais das faces e do núcleo. Esta possibilidade permite um projecto óptimo para aplicações particulares. Naturalmente, a utilização deste tipo de tecnologia, apesar das vantagens óbvias possui também desvantagens. Na tabela 2.1 estão descritos alguns destes aspectos segundo [8].

Tabela 2.1: Vantagens e desvantagens da estrutura *sandwich*.

Vantagens	Desvantagens
Alta rigidez específica.	Resinas são perigosas para a saúde.
Baixo peso.	Falta de informação dos engenheiros.
Isolamento térmico e acústico.	Reciclagem/reparação mais difícil -
Construção de formas complexas.	-(compósitos).
Poucas peças estruturais necessárias.	Incompatibilidade de materiais.
Grande variedade de materiais.	Controlo de qualidade.
Resistência em ambientes nocivos.	Resistência ao fogo (plásticos).

2.3.1 A origem da tecnologia *sandwich*

O conceito de estrutura *sandwich* nasceu da observação e estudo de estruturas desenvolvidas pela natureza. São diversos os exemplos na natureza de estruturas *sandwich*, tais como: ossos, folhas de plantas e asas de aves. Também o favo de mel serviu de inspiração para desenvolvimento de estruturas leves e resistentes.

O avião Mosquito, desenvolvido durante a segunda guerra mundial pela empresa de Havilland, é geralmente citado como a primeira grande aplicação das estruturas *sandwich*. Este reconhecimento resultou do sucesso alcançado pelo avião, sendo que o alto desempenho do avião está directamente relacionado com a utilização de tecnologia *sandwich* na sua construção. A fuselagem do avião era construída em duas metades que eram posteriormente unidas segundo o plano vertical e era constituída por painéis *sandwich* com as faces de contraplacado e núcleo de balsa. [9]

Outro marco na história da tecnologia *sandwich* é a alunagem da cápsula Apollo em 20 de Julho de 1969. A utilização desta tecnologia permitiu uma construção suficientemente leve ainda que resistente aos esforços de entrada e saída da atmosfera. Alguns pormenores construtivos estão ilustrados na figura 2.4. [8]

A partir da década de 60, foram descobertas e desenvolvidas numerosas aplicações alternativas para esta tecnologia, tais como: construção de edifícios, armazenamento frigorífico, indústria automóvel e naval, etc [8]. Uma solução muito recente, semelhante em construção e materiais utilizados, à estrutura estudada nesta dissertação, são os painéis ALUCORK (fig. 2.5 b) da Amorim Cork Composites. Estes painéis são actualmente aplicados no chão metro Inspiro da Siemens (fig. 2.5 a), permitindo uma poupança de 25% no peso, melhor isolamento térmico e acústico, assim como menor impacto ambiental relativamente a produtos semelhantes no mercado [10; 11].

2.3.2 Considerações estruturais e modos de falha

As estruturas *sandwich* são projectadas segundo vários critérios estruturais. São critérios que estão relacionados com a interacção entre os materiais da própria estrutura, assim como a resposta a solicitações exteriores.

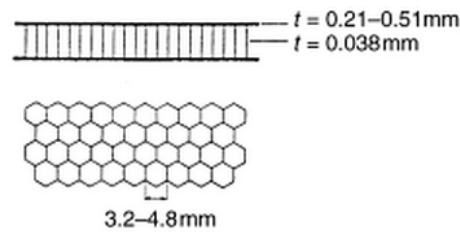
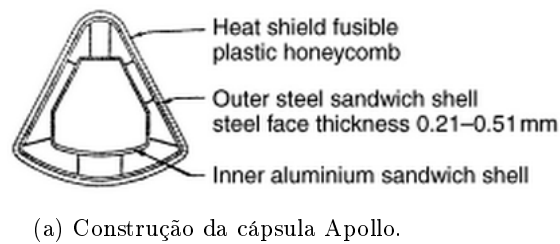


Figura 2.4: Tecnologia *sandwich* na cápsula Apollo. [8]

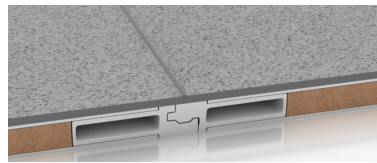


Figura 2.5: Aplicação de painéis *sandwich* alumínio - aglomerado de cortiça. [10; 11]

No núcleo podem ser utilizados materiais de baixa densidade, ainda que com um módulo de rigidez ao corte suficiente para evitar que as faces escorreguem uma relativamente à outra, assim como uma resistência suficiente para manter a distância entre as faces constante. Relativamente às faces, onde ocorrem tensões normais máximas devido à flexão e esforços axiais, utilizam-se materiais de elevada resistência. Os adesivos devem ser de um material que garanta uma ligação rígida entre as faces e o núcleo de modo a transmitir os esforços entre faces. Também é importante considerar a gama de temperaturas a que a estrutura estará sujeita, nomeadamente em materiais poliméricos, pois a alteração da rigidez do núcleo influencia o comportamento global da estrutura.

Outros factores como por exemplo, condições ambientais e económicas, entram também em consideração no projecto destas estruturas. [4; 5]

Na figura 2.6 estão ilustrados os principais modos de falha a que uma estrutura *sandwich* está sujeita.

Descrevendo cada um deles de forma resumida segundo as referências [4; 12; 13], vem

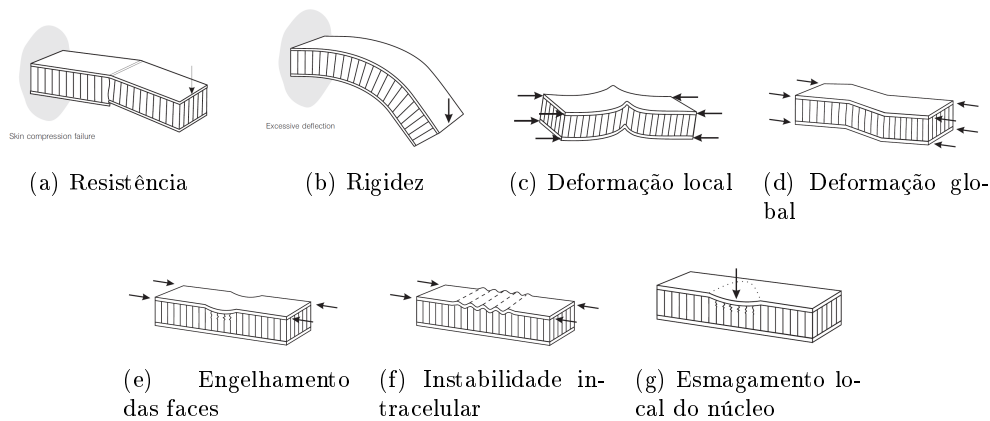


Figura 2.6: Modos de falha em estruturas *sandwich* [4]

que:

- a) **Resistência** - Os materiais das peles e do núcleo devem ser capazes de resistir às tensões normais e de corte induzidas. Assim como o adesivo tem de garantir a transferência das tensões de corte entre as peles e o núcleo.
- b) **Rigidez** - A estrutura *sandwich* deve possuir rigidez ao corte suficiente para evitar flexão excessiva.
- c) **Deformação local** - A espessura do núcleo e o módulo de corte têm de ser adequados de modo a prevenir a deformação local da estrutura devido a cargas de compressão.
- d) **Deformação global** - Pode ser consequência da deformação local. Assim como no exemplo anterior, a espessura do núcleo e o módulo de corte têm de ser adequados.
- e) **Engelhamento das faces** - A resistência do núcleo à compressão deve ser suficiente, assim como a resistência dos adesivos na situação de tensão no plano (engelhamento para fora).
- f) **Instabilidade intracelular** - Na presença de um núcleo celular, de modo a não ocorrer este tipo de falha, o tamanho das células deve ser suficientemente pequeno em relação à espessura das peles.
- g) **Esmagamento local do núcleo** - A resistência à compressão do material do núcleo não pode ser demasiado baixa.

2.3.3 Materiais utilizados

Um requisito fundamental para a eficiência de uma estrutura *sandwich* é a escolha adequada dos materiais. Sendo que as diferentes partes da estrutura deverão ser constituídas por materiais adequados às respectivas funções e solicitações.

Na referência [14] é feito um estudo de comparação entre algumas combinações de materiais para aplicação em estruturas *sandwich*, de onde resulta a figura 2.7.

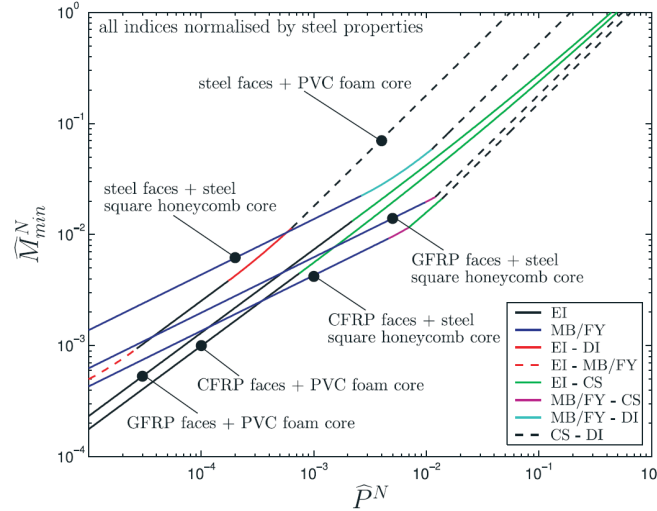


Figura 2.7: Mapa de escolhas de materiais para vigas *sandwich*. EI = elastic indentation; MB/FY = microbuckling/face yield; CS = core shear; DI = ductile indentation; GFRP = glass fibre reinforced plastic; CFRP = carbon fibre reinforced plastic.[14]

Quanto à figura 2.7, para seleccionar a combinação óptima ao nível de peso escolhem-se os materiais que minimizam \hat{M}_{min} para qualquer valor seleccionado de \hat{P} . Para valores baixos de \hat{P} , a escolha óptima corresponde a uma estrutura constituída por faces de plástico reforçado com fibra de carbono (CFRP) e núcleo de PVC. Por outro lado, para valores mais altos de \hat{P} é preferível utilizar uma estrutura com faces de CFRP e núcleo de aço na forma de favo de mel.[14]

Faces

Normalmente, pretende-se que o material das faces possua principalmente um elevado módulo de elasticidade. Outras propriedades, como a dureza, isolamento térmico e acústico, resistência à corrosão, podem influenciar a escolha do material das faces, dependendo da aplicação da estrutura *sandwich*. Os materiais mais comuns nas faces destas estruturas, são os aços, as ligas de alumínio, a madeira e os materiais compósitos[5]. O aço é o material mais utilizado, assim como as ligas de alumínio para soluções mais exigentes ao nível da corrosão.

Núcleo

Geralmente os materiais do núcleo são seleccionados com o intuito de serem leves e compatíveis com o material das faces e com a ligação face-núcleo [12]. O primeiro material

utilizado como núcleo foi a madeira de balsa, que ainda é usada em algumas aplicações, embora a tendência seja a utilização de materiais alternativos. Os materiais mais utilizados em todas as aplicações excepto a aeroespacial, são as espumas poliméricas expandidas, que são preparadas para alcançar uma tolerância à temperatura razoavelmente alta e permitem a construção de formas complexas. Destacam-se entre os polímeros utilizados, o poliuretano (PUR), o poliestireno (PS), o policloreto de polivinila (PVC), o polietileno (PE), etc. São também utilizados materiais metálicos geralmente na forma de favo de mel ou espumas metálicas. [5]

Adesivos

Na situação das estruturas *sandwich*, o adesivo é parte integrante da estrutura, então deverá apresentar uma resistência equivalente aos materiais constituintes da estrutura a ser colada.

Habitualmente consideram-se os adesivos das famílias dos fenólicos, acrílicos, poliuretanos, poliimidas e epóxidos. Na tabela 2.2 encontram-se descritas algumas propriedades dos adesivos destas famílias, contudo, as propriedades dos adesivos podem ser modificadas pela adição de outras resinas ou por um elastómero.[15]

Tabela 2.2: Tipos de adesivos e respectivas propriedades

Família	Vantagens	Desvantagens
Fenólicos	Baixo custo; boa resistência mecânica; boa resistência a temperaturas elevadas.	Baixa resistência à corrosão por solventes; baixa resistência ao impacto; fragilidade devido ao processo de cura.
Acrílicos	Boa resistência a solventes.	Resistência mecânica muito variável.
Poliuteranos	Boa flexibilidade; bom comportamento a baixas temperaturas; Boa resistência ao arrancamento; boa tenacidade.	Toxicidade do isocianato; baixa resistência ao corte à temperatura ambiente.
Poliimidas	Grande dureza.	Custo bastante elevado; frágeis; pouco tenazes; resistem mal a vibrações.
Epóxidos	Boa resistência mecânica; não produzem agentes voláteis durante a cura; apresentam reduzida contracção.	

2.4 A cortiça

Por definição, a cortiça é o parênquima suberoso originado pelo meristema suberofelodérmico do sobreiro (*Quercus suber* L.), constituindo o revestimento do seu tronco e ramos. [16]

As aplicações da cortiça são conhecidas desde a antiguidade, sobretudo como material flutuante e vedante. Sendo que, com o desenvolvimento de derivados e aglomerados de cortiça no início do séc. XX o seu mercado expandiu-se largamente.

Resumidamente, a cortiça é um material leve, elástico, praticamente impermeável a líquidos e gases, isolante térmico, eléctrico e absorvedor acústico e vibratório. Possui ainda a capacidade de ser comprimido sem se expandir lateralmente [17].

2.4.1 Produção, transformação e comercialização

O sobreiro é uma espécie típica da região Mediterrânica Ocidental, o seu montado ocupa actualmente uma área de 1,43 milhões de hectares na Europa e 0,85 milhões de hectares no Norte de África sendo que mais de metade desta área se encontra na Península Ibérica [18]. A distribuição mundial do sobreiro está esquematizada na figura 2.8. A indústria

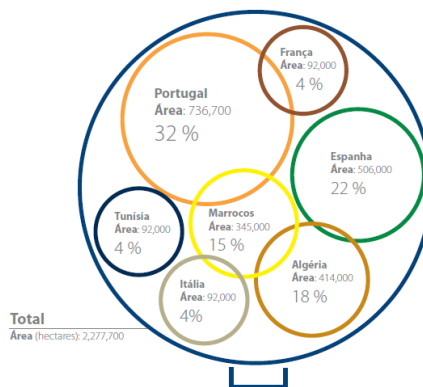


Figura 2.8: Área de distribuição mundial do sobreiro [18]

corticeira tem uma importância muito relevante em todos os países produtores, especialmente na Península Ibérica, onde as exportações representam 80% do total mundial (ver figura 2.9a). Em Portugal o sobreiro e respectivos sistemas florestais originam 12 mil postos de trabalho frabril, 6500 postos de trabalho na área de exploração florestal, para além de milhares de postos indirectos relacionados com a pecuária, restauração e turismo. As regiões produtoras relevantes no território nacional são o Alentejo e Lisboa e Vale do Tejo (ver figura 2.9b). Esta indústria contribui anualmente com 2,3% do valor total das exportações nacionais.[18]

A cortiça é extraída do tronco e ramos do sobreiro, sob a forma de peças semi tubulares, habitualmente no Verão, e com uma periodicidade mínima legal de nove anos. A sua exploração começa após a árvore atingir 0,7 m de perímetro a 1,3 m do solo, processo que leva entre 25 e 30 anos. A árvore não pode ser totalmente "despida" do seu revestimento suberoso. O ciclo industrial da cortiça começa assim no descortiçamento, sendo este ciclo teoricamente infinito pois a cortiça é 100% reciclável. O primeiro descortiçamento ou desbóia produz uma cortiça virgem de superfície, espessura e densidade

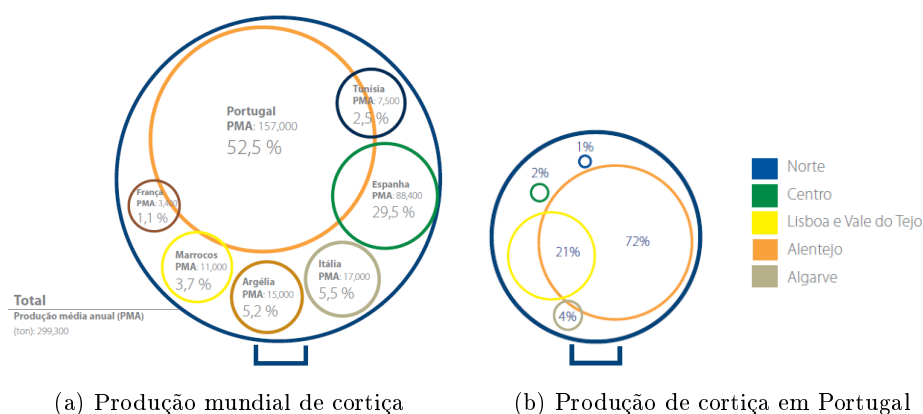


Figura 2.9: Produção de cortiça [18]

irregulares. Apenas a cortiça correspondente ao terceiro descortiçamento é utilizada para produção de rolhas, enquanto todos os tipos de cortiça podem ser usados para produção de aglomerados.[16; 17]

Toda a cortiça extraída é ainda sujeita a um processo de ferverura durante uma hora. Este processo provoca a expansão do gás presente no interior das células, dando origem a uma estrutura celular uniforme e regular. Finalmente e após secagem, a cortiça está pronta para ser trabalhada [17].

2.4.2 Estrutura e composição da cortiça

A cortiça apresenta uma estrutura alveolar ou celular dispostas de modo regular e sem espaços livres, como se pode verificar na figura 2.10a, que mostra uma observação em microscópio. A célula média da cortiça tem a forma de um prisma hexagonal, no entanto o número de lados do polígono varia mas geralmente encontra-se entre 5 e 7 lados. A largura média de cada célula encontra-se entre 30 e 40 μm e a sua altura entre 35 e 45 μm . O volume das paredes das células é de cerca de 10-15% do volume total. Cada centímetro cúbico de cortiça contém em média 30 a 42 milhões de células. [19]

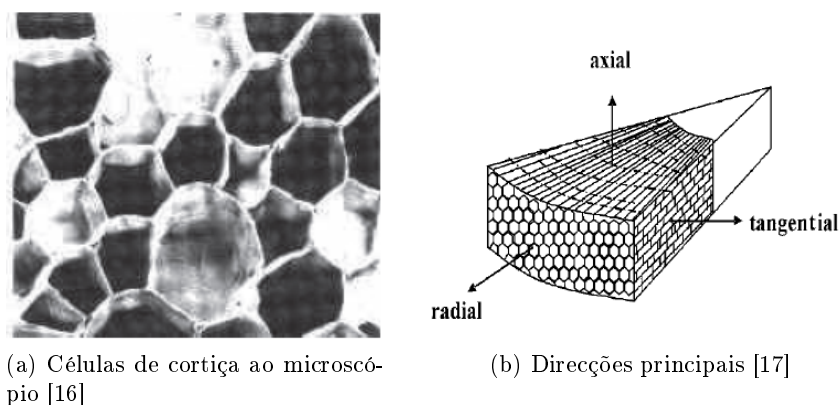


Figura 2.10: Células de cortiça

Devido ao alinhamento das células, a estrutura da cortiça é anisotrópica. As três

Tabela 2.3: Composição química da cortiça

Compostos	Funções
Suberina (45%)	Compressibilidade e elasticidade
Lenhina (27%)	Estrutura das paredes celulares
Polissacarídeos (12%)	Presente na estrutura da cortiça
Ceróides (6%)	Impermeabilidade
Taninos (6%)	Protecção do material
Cinzas (4%)	

direcções principais são facilmente identificáveis, como se pode verificar na figura 2.10b, onde a direcção radial é paralela aos raios da árvore, a axial corresponde à direcção vertical na árvore e a tangencial que é tangente à circunferência da secção da árvore.

Como consequência do facto de as células de cortiça serem mais pequenas do que as dos materiais celulares ordinários e estarem cheias de ar, as propriedades de isolamento deste material são excepcionais[19].

Em relação à composição química da cortiça, os valores típicos segundo a referência [19], são os apresentados na tabela 2.3.

2.4.3 Aplicações

A cortiça é usada tradicionalmente para diversas aplicações, no entanto, a produção de rolhas continua a dominar e apresenta o maior valor acrescentado nesta indústria. Apenas a cortiça de melhor qualidade é usada para produzir rolhas, sendo que a restante, assim como o desperdício da produção de rolhas é aproveitada para produção de aglomerado de cortiça. Os aglomerados de cortiça são o resultado de um processo de aglutinação dos grânulos (cortiça virgem e desperdícios triturados), através da acção conjunta da pressão, temperatura e agente de aglutinação. Estes agentes podem ser resinas sintéticas de poliuretano, fenólicas, melamínicas, ou de origem vegetal. [16; 17]

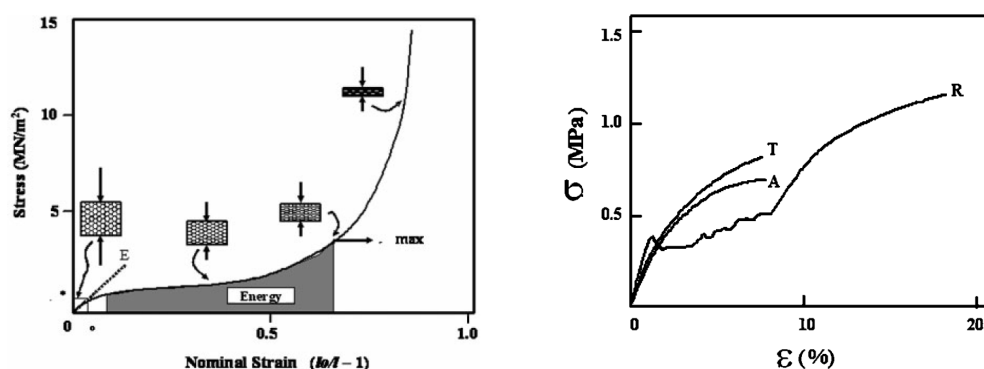
Tendo em conta que é possível produzir grânulos de diferentes calibres e com diferentes propriedades, a produção de aglomerados de cortiça adapta-se à finalidade pretendida. Entre outras, as aplicações de aglomerado de cortiça, são [16; 19]:

- Isolamentos térmicos e acústicos de edifícios (tecto, pavimento e paredes).
- Isolamentos vibráticos (ex: maquinaria).
- Juntas de dilatação.
- Isolamento para frio industrial.
- Revestimento de rubbercork e outros.
- Aplicações decorativas.
- Vestuário.
- Mobiliário.
- Rolhas de aglomerado.

Outras aplicações passam pelo aproveitamento do pó de cortiça resultante do processo industrial. Este resíduo pode ser prensado com a acção de pressão e temperatura, originando um material que mantém as propriedades da cortiça mas que pode apresentar melhores características mecânicas e impermeabilidade à água. As aplicações podem ser diversas, e pode competir com a madeira e polímeros em preço já que é um resíduo muito abundante e actualmente pouco aproveitado. [17]

2.4.4 Propriedades mecânicas

A cortiça natural apresenta características mecânicas muito particulares, no entanto, os seus aglomerados podem ainda apresentar características diferentes. Nesta secção serão comparadas, de uma forma geral, algumas das propriedades da cortiça natural com as dos seus aglomerados.



(a) Gráfico carga - deslocamento à compressão (b) Gráfico carga - deslocamento à tracção

Figura 2.11: Comportamento da cortiça natural à compressão e à tracção [17]

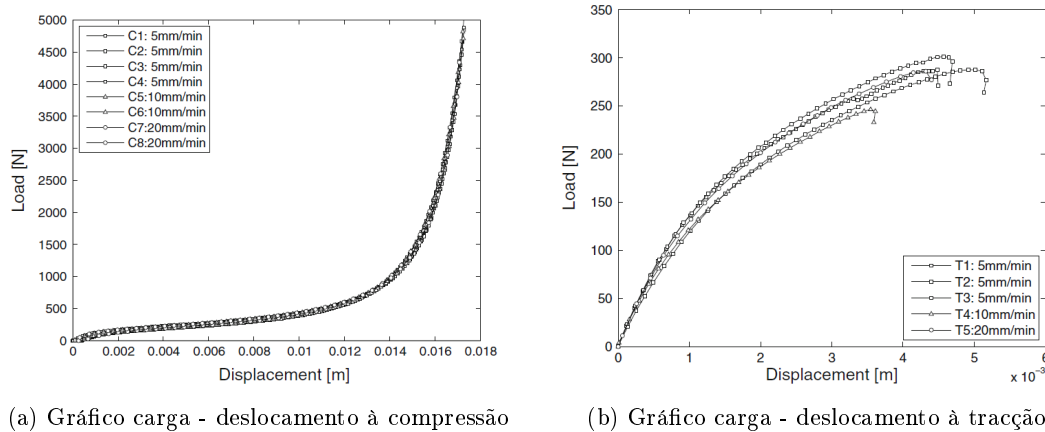
Analisando a curva de compressão ilustrada na figura 2.11a, distinguem-se três regiões que estão relacionadas com três mecanismos responsáveis pelas propriedades dos materiais celulares. A primeira região, vai até 7% da deformação corresponde à flexão elástica das paredes das células. Segue-se uma região quase horizontal que se estende até 70% da sua deformação e é originada pela encurvadura das paredes das células. Finalmente, o esmagamento das paredes e o colapso total das células, leva a aumento exponencial da curva. No caso de uma compressão na direcção radial, ocorre uma pequena expansão nas direcções não radiais, resultando num valor de ν (coeficiente de Poisson) positivo. Por outro lado, se a compressão ocorrer numa direcção não radial, o valor de ν é negativo. [17]

Relativamente ao comportamento da cortiça sujeita à tracção e observando o gráfico 2.11b, constata-se que as curvas para direcções não radiais (T - tangencial e A - axial) diferem bastante da curva para a direcção radial (R). Nas curvas T e A assiste-se ao fenómeno de fractura que ocorre quando as tensões aplicadas excedem as tensões limite do material. A curva R referente à direcção radial apresenta um serrilhado que é explicado pela fractura progressiva das paredes laterais. [17]

Segundo [20], o módulo de Young da cortiça à compressão é consideravelmente menor do que à tensão. O valor superior para a tensão pode ser explicado pela rigidez das pare-

des encurvadas das células, que aumenta com a diminuição da amplitude da encurvadura das paredes.

Em relação às propriedades mecânicas do aglomerado de cortiça, estas foram verificadas experimentalmente no artigo [21]. O referido artigo serve de referência para este trabalho já que o aglomerado testado experimentalmente é o mesmo que é utilizado nesta dissertação.



(a) Gráfico carga - deslocamento à compressão

(b) Gráfico carga - deslocamento à tracção

Figura 2.12: Comportamento do aglomerado de cortiça à compressão e à tracção [21]

Observando o gráfico 2.12 e segundo [21], o comportamento do aglomerado de cortiça à compressão, é semelhante ao comportamento da cortiça natural (fig.2.11 a)), apresentando também três etapas de compressão. Neste teste foram utilizadas diferentes orientações para o cubo de aglomerado de cortiça, de forma a analisar as propriedades isotrópicas deste material, devido à distribuição e orientação aleatória dos grânulos [16]. Os resultados obtidos mostraram-se ainda independentes da velocidade de compressão. Este aglomerado pode ser descrito por um módulo de Young à compressão de 7.4 ± 0.3 MPa.

No que toca ao comportamento do aglomerado de cortiça à tensão, o gráfico 2.12 b) mostra que também aqui se deixa de observar a diferença de comportamento tendo em conta a direcção de solicitação. Os resultados obtidos evidenciam um módulo de Young à tracção de 17.4 ± 1.3 MPa, que é claramente maior do que obtido no teste compressivo. Esta observação está de acordo com o referido anteriormente para a cortiça natural e explicado em [20].

Parte II

Métodos e Modelos

Capítulo 3

Modelos analíticos

Neste capítulo apresenta-se a solução proposta para a caracterização do comportamento da viga compósita. Começa-se por descrever o problema e de seguida são indicadas as considerações tomadas ao longo da formulação. Será abordado o problema estático, incluindo tensões de corte que actuam nesta estrutura, assim como o problema dinâmico.

3.1 Deformada segundo um polinómio cúbico

Sendo que o elemento é constituído por dois nós, e a cada um deles estão associados dois graus de liberdade (deslocamento transversal e rotação), então, as funções de forma apropriadas devem ser cúbicas, já que o grau do polinómio é dado por: *Nº graus de liberdade - 1*, ou seja: $4 - 1 = 3$. Então, a formulação apresentada nesta secção corresponde à formulação cúbica hermitiana. Estes elementos de dois nós de formação cúbica hermitiana possuem a vantagem de assegurar a continuidade da deformação pelo facto de ter os graus de liberdade em cada nó acoplados. O modelo de deformação segue o de Euler - Bernoulli, em que a curvatura da viga é o principal parâmetro de caracterização do campo de deformações.

Considerando o seguinte polinómio cúbico:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.1)$$

É necessário tornar a variável do comprimento numa grandeza adimensional, então vem que $\xi = \frac{x}{L}$ e o polinómio e primeira derivada passam a ser:

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \\ y' = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.1 Caso de deslocamento imposto

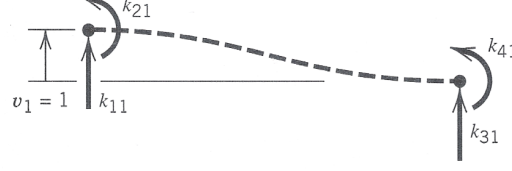


Figura 3.1: Caso de deslocamento imposto.

Para o caso correspondente à figura 3.1, e referido na secção 2.2, resolvem-se os polinómios anteriores (3.2) segundo as condições fronteira associadas a este caso, que são:

$$\begin{cases} y(x=0) = 1; y'(x=0) = 0 \\ y(x=L) = 0; y'(x=L) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Sendo assim, e após resolução dos polinómios segundo as condições fronteira, obtêm-se as seguintes equações para $x=0$ e $x=L$.

$$y\left(\frac{x}{L}\right) = \begin{cases} a_0 = 1 & \text{se } x=0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 & \text{se } x=L \end{cases} \quad (3.4)$$

$$y'\left(\frac{x}{L}\right) = \begin{cases} \frac{a_1}{L} = 0 & \text{se } x=0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 & \text{se } x=L \end{cases} \quad (3.5)$$

As equações (3.4) e (3.5) resultam no seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -1 \\ 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -3 \\ a_3 = 2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Deste modo, o polinómio para este caso resulta em:

$$y = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.7)$$

E as suas derivadas parciais são as seguintes:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{12}{L^3} \quad (3.10)$$

De procedimento análogo, obtêm-se a função de forma para o nó j , que resulta em:

$$y = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.11)$$

3.1.2 Caso de rotação imposta

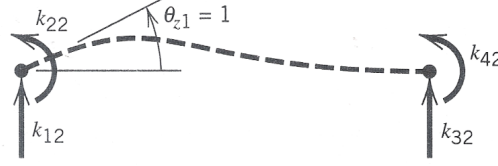


Figura 3.2: Caso de rotação imposta.

De forma análoga ao caso anterior, mas neste caso para a situação ilustrada na figura 3.2, resolvem-se os polinómios (3.2) de acordo com respectivas condições fronteira, que neste caso são:

$$\begin{cases} y(x=0) = 0; y'(x=0) = 1 \\ y(x=L) = 0; y'(x=L) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Portanto, obtêm-se as seguintes equações para $x=0$ e $x=L$.

$$y\left(\frac{x}{L}\right) = \begin{cases} a_0 = 0 & \text{se } x=0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 & \text{se } x=L \end{cases} \quad (3.13)$$

$$y'\left(\frac{x}{L}\right) = \begin{cases} \frac{a_1}{L} = 1 & \text{se } x=0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 & \text{se } x=L \end{cases} \quad (3.14)$$

As equações (3.13) e (3.14) resultam no seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -L \\ 2a_2 + 3a_3 = -L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2L \\ a_3 = L \end{cases} \quad (3.15)$$

Deste modo, o polinómio para este caso resulta em:

$$y = L\left(\frac{x}{L}\right) - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.16)$$

E as suas derivadas parciais são as seguintes:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{6}{L^2} \quad (3.19)$$

De procedimento análogo, obtém-se a função de forma para o nó j , que resulta em:

$$y = L(-\xi^2 + \xi^3) \quad (3.20)$$

3.2 Curvatura de uma viga

Ao estabelecer a relação entre a curvatura e a deformação, e entre as tensões axiais e o momento flector, é possível relacionar a curvatura com o momento. Então, o primeiro passo é obter a deformação. Como ilustrado na figura 3.3, o comprimento final de uma

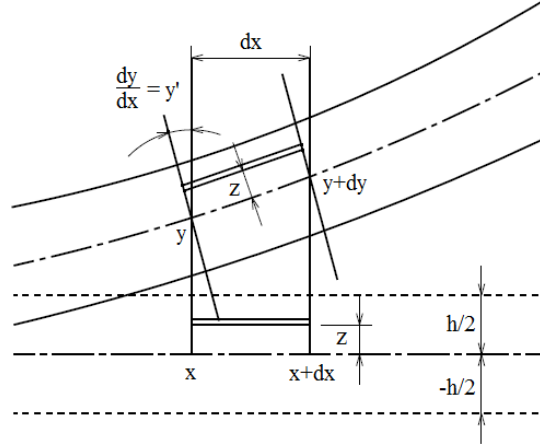


Figura 3.3: Curvatura da viga.

fibra é dado por:

$$dx + zy' - z(y' + dy') = dx - zdy', \text{ onde } y' = \frac{dy}{dx} \quad (3.21)$$

Sabendo o comprimento final, calcula-se agora a deformação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\text{comprimento final } dx - \text{comprimento inicial } dx}{\text{comprimento inicial } dx} \\ &= \frac{\left(dx - z \frac{d^2y}{dx^2} dx\right) - dx}{dx} \\ &= -z \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Então, sabendo a deformação ao longo deste eixo, é possível determinar através da lei de *Hooke* a tensão ε_{xx} no sólido à distância z do eixo neutro. Sendo assim temos que:

$$\sigma_{xx} = E \times \varepsilon_{xx} \quad (3.23)$$

Como se pode observar na figura 3.4, as tensões segundo o eixo x induzem um momento em relação ao eixo y . Relacionando as equações anteriores (3.22) e (3.23), obtém-se uma expressão que permite determinar a derivada do momento em relação ao eixo y . Deste modo:

$$dM_y = \sigma_{xx} \times Bdz \times z = E \left(-z^2 B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dz \quad (3.24)$$

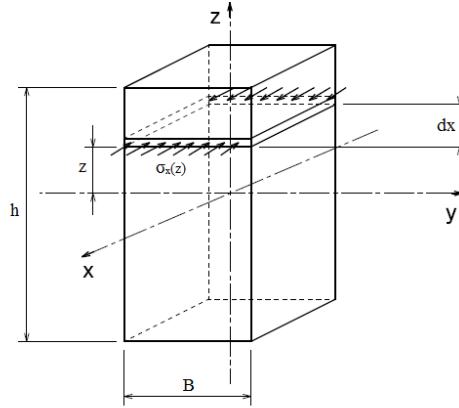


Figura 3.4: Tensões axiais numa fibra da viga.

Finalmente, integrando a expressão anterior em ordem a z , obtém-se uma expressão genérica para calcular o momento segundo o eixo y para uma viga homogênea.

$$M_{total} = -EB \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -EB \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \quad (3.25)$$

Esta última equação é geralmente conhecida por equação diferencial da linha elástica.

3.2.1 Caso de viga compósita

Em relação ao caso de estudo nesta dissertação, que incide sobre uma viga *sandwich*, foi necessário adaptar a expressão (3.25) para que fosse possível contar com os termos relativos às diferentes espessuras e módulos de Young.

Como é possível observar na figura 3.5, para analisar o seu comportamento, é necessário ter em conta as dimensões das peles e do núcleo. Neste caso, visto que as peles correspondem a duas camadas simétricas, apenas se irá calcular para a situação inferior e multiplicar o respectivo valor por dois. As constantes B e e correspondem à largura da viga e à espessura da pele de alumínio respectivamente. Portanto, o momento será

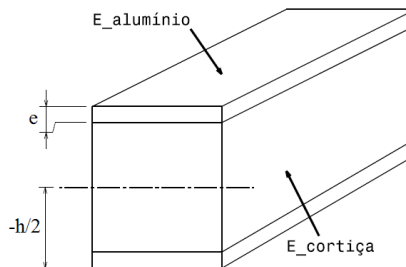


Figura 3.5: Viga compósita - novas considerações.

calculado do seguinte modo:

$$M = -B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left[2E_{al} \int_{-h/2}^{-(h/2-e)} z^2 dz + E_{cork} \int_{-(h/2-e)}^{(h/2-e)} z^2 dz \right] \quad (3.26)$$

Resolvendo o primeiro integral, que corresponde às peles de alumínio e sabendo que a solução é $\frac{z^3}{3}$, vem que:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-h/2}^{-(h/2-e)} z^2 dz &= \frac{2}{3} \left[-\left(\frac{h}{2} - e\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right] \\ &= -\frac{2}{3} \left[-\frac{3h^2}{4}e + \frac{3h}{2}e^2 - e^3 \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Em relação ao segundo integral, que corresponde ao aglomerado de cortiça, a sua solução corresponde ao seguinte:

$$\begin{aligned} \int_{-(h/2-e)}^{(h/2-e)} z^2 dz &= \frac{1}{3} \left[(h/2 - e)^3 + (h/2 - e)^3 \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{h^3}{8} - \frac{3h^2}{4}e + \frac{3h}{2}e^2 - e^3 \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Deste modo, e supondo que $E_{equivalente} \times I_{equivalente} = E_{al}I_{al} + E_{cork}I_{cork}$, o momento corresponde a:

$$M = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} [E_{al}I_{al} + E_{cork}I_{cork}] \quad (3.29)$$

Onde, de acordo com as equações anteriores (3.27) e (3.28), os termos associados às respectivas camadas correspondem às seguintes equações.

$$E_{al}I_{al} = E_{al}B \left[-\frac{2}{3} \left(-\frac{3h^2}{4}e + \frac{3h}{2}e^2 - e^3 \right) \right] \quad (3.30)$$

$$E_{cork}I_{cork} = E_{cork}B \left[\frac{2}{3} \left(-\frac{h^3}{8} - \frac{3h^2}{4}e + \frac{3h}{2}e^2 - e^3 \right) \right] \quad (3.31)$$

Concluindo, de modo a calcular os coeficientes equivalentes da matriz de rigidez da estrutura *sandwich*, recorre-se à equação (3.29) para os coeficientes associados ao momento, ou à sua derivada para os coeficientes associados ao esforço transversal. Os termos diferenciais correspondem às equações (3.9) e (3.18), dependendo do caso analisado, como explicado na secção 3.1.

3.3 Determinação de tensões de corte em vigas sob momento flector variável

3.3.1 Caso de viga homogénea

Neste caso, a distribuição de tensões numa viga homogénea deformada segundo o modelo de Euler-Bernoulli é a ilustrada na figura 3.6.

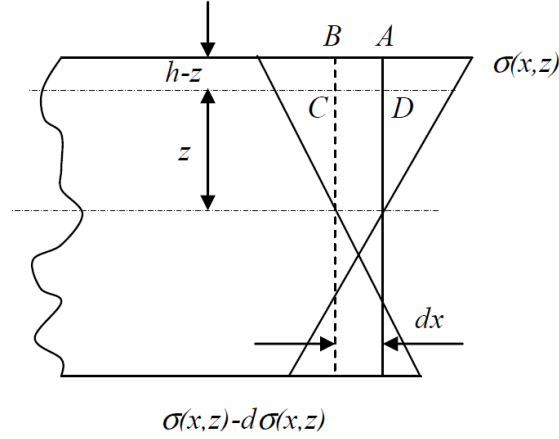


Figura 3.6: Distribuição de tensões numa viga homogénea.

Supondo o equilíbrio do elemento ABCD, na face superior (externa) não há qualquer tensão, só existem tensões nas duas pequenas faces laterais (a face esquerda está à distância dx da face mais à direita) e na face inferior CD do elemento. Estas últimas são tensões de corte que se procuram calcular. Assim, considerando apenas o somatório de todas as forças em ABCD segundo a horizontal, o equilíbrio é:

$$\int_z^h \sigma b dz - \int_z^h (\sigma - d\sigma) b dz - \tau b dx = 0 \Leftrightarrow \int_z^h d\sigma b dz - \tau b dx = 0 \quad (3.32)$$

Sendo que pela fórmula da flexão vem que:

$$\sigma = \frac{M_{laminas}(x)z}{I} \Rightarrow d\sigma = \frac{dM_{laminas}(x)z}{I} \quad (3.33)$$

Deste modo:

$$\int_z^h d\sigma b dz = \tau b dx \Rightarrow \int_z^h \frac{dM_{laminas}(x)z}{I} b dz = \tau dx \quad (3.34)$$

Então, a fórmula final é:

$$\begin{aligned} \int_z^h \frac{dM_{laminas}(x)z}{dx I} b dz = \tau &\Leftrightarrow \tau = \frac{dM_{laminas}(x)}{dx} \int_z^h \frac{z}{I} b dz \\ &\Leftrightarrow \tau = Q_{laminas}(x) \frac{S(z)}{I} \end{aligned} \quad (3.35)$$

A última forma da expressão é conhecida como fórmula do esforço transversal e depende da expressão integral $S(z) = \int_z^h \frac{bz dz}{I}$, que corresponde ao momento estático da secção acima da coordenada z , até à face superior externa. I corresponde ao momento de inércia da secção e não depende do integral em z .

3.3.2 Caso de viga laminada: módulos de Young diferentes

Seja esta distribuição de tensões:

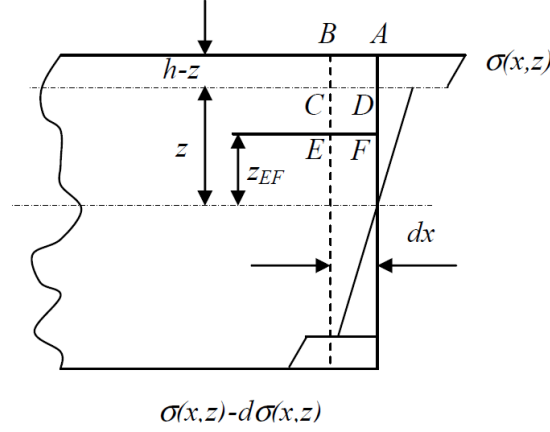


Figura 3.7: Distribuição de tensões numa viga laminada.

A tensão de corte ao nível da face CD depende do equilíbrio entre dois elementos adjacentes. O cálculo da tensão de corte agora ao nível da face EF depende do valor da tensão de corte na face CD (já calculado como explicado anteriormente) e das tensões nas faces CE e DF. O equilíbrio determina a seguinte expressão:

$$\int_{z_{EF}}^z \sigma b dz - \int_{z_{EF}}^h (\sigma - d\sigma) b dz - \tau b dx = 0 \quad (3.36)$$

$$\Leftrightarrow \left[\int_{z_{EF}} \frac{d\sigma_{core}}{dx} dx b dz \right]_{EF}^{CD} - (\tau b dx)_{CD} - (\tau b dx)_{EF} = 0$$

Então da seguinte expressão determinam-se as tensões $(\tau b)_{EF}$, que são as que interessam.

$$\left[\frac{dM_{core}(x)}{dx} \int_{z_{EF}}^z \frac{z}{I} b dz \right]_{EF}^{CD} - (\tau c)_{CD} - (\tau b)_{EF} = 0 \quad (3.37)$$

Viga laminada - obtenção do momento flector e tensões de corte interlaminares.

Sabendo a relação entre a curvatura e a deformação, através da lei de Hooke (equação 3.38), determina-se a expressão geral para o momento flector.

$$\sigma = E\varepsilon = Ez \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.38)$$

$$M_{total} = \int_{-h/2}^{h/2} Ez \frac{d^2 w}{dx^2} b dz = E \frac{d^2 w}{dx^2} b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = E \frac{d^2 w}{dx^2} I_{xx} \quad (3.39)$$

Onde I_{xx} representa o momento de inércia da secção rectangular. Logo, a expressão resulta na conhecida equação da elástica.

Caso de duas lâminas externas mais núcleo.

Analisando separadamente o comportamento do núcleo e das peles, determinam-se as respectivas tensões. Assim, para o núcleo vem que:

$$\text{para } z \in \left(0, \frac{h_{nucleo}}{2} - h_{pele}\right) \Rightarrow \sigma_{nucleo} = E_{nucleo} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{h_{nucleo}}{2} \quad (3.40)$$

E em relação às peles:

$$\text{para } z \in \left(\frac{h_{nucleo}}{2} - h_{pele}, \frac{h}{2}\right) \Rightarrow \sigma_{pele} \simeq E_{pele} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h_{pele}}{2}\right) \quad (3.41)$$

Neste caso, a expressão para o momento resulta em:

$$\begin{aligned} M_{total} &= 2 \int_0^{h/2-h_{pele}} E_{nucleo} \frac{d^2 w}{dx^2} z^2 dz + 2 \int_{h/2-h_{pele}}^{h/2} E_{pele} \frac{d^2 w}{dx^2} z^2 dz \quad (3.42) \\ &= EB \frac{(h/2 - h_{pele})^3}{12} \frac{d^2 w}{dx^2} + 2EB \frac{d^2 w}{dx^2} \underbrace{\left[\frac{z^3}{3}\right]_{h/2-h_{pele}}^{h/2}}_A \end{aligned}$$

Sendo que resolvendo apenas A, temos que:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\frac{h^3}{24} - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} - h_{pele} \right)^3 \right] \quad (3.43) \\ &= 2 \left[\frac{h^3}{24} - \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \frac{3h^2}{4} h_{pele} + \frac{3h}{2} h_{pele}^2 - h_{pele}^3 \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{h^2 h_{pele}}{4} - \frac{h h_{pele}^2}{2} + \frac{h_{pele}^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Então, se $h_{pele} \ll \frac{h}{2}$, podemos usar como contributo para o momento total a expressão (relativa apenas às peles):

$$M_{peles} = 2EB \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{h^2 h_{pele}}{4} = EB \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{h^2 h_{pele}}{2} = E \frac{d^2 w}{dx^2} (h_{pele} B) \frac{h^2}{2} \quad (3.44)$$

O que resulta na seguinte expressão aproximada para o momento total aplicado.

$$M_{total} = E_{nucleo} I_{nucleo} \frac{d^2 w}{dx^2} + E_{pele} \frac{h^2}{2} h_{pele} B \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.45)$$

Tensões de corte

Então desenvolveram-se as próximas equações de modo a determinar distribuição da tensão de corte ao longo da secção, em função da distância à camada externa superior. Seja a tensão de corte na pele dada por:

$$\tau_{pele} = \frac{dM}{dx} \frac{B \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) y}{I_{pele}} \quad (3.46)$$

onde $y \in [0, h_{pele}]$. Em relação à tensão de corte real no núcleo, é necessário somar a tensão de corte na zona de contacto entre a pele e o núcleo, logo:

$$\tau_{nucleo} = \frac{dM}{dx} \frac{B \left(\frac{h - h_{pele}}{2} - \frac{y}{2} \right) y}{I_{nucleo}} + \tau_{pele/nucleo} \quad (3.47)$$

onde $y \in [0, h/2 - h_{pele}]$. Nestas equações, os valores de $\frac{dM}{dx}$ e I são a determinar, h_{pele} , h e B são parâmetros da estrutura e y é a variável.

Mais à frente é apresentado um exemplo da distribuição da tensão de corte numa estrutura *sandwich*.

3.4 Vibrações não amortecidas

Uma estrutura tem um número ilimitado de frequências naturais, o que significa que tem um número ilimitado de graus de liberdade. Num modelo de elementos finitos, o número de frequências naturais é igual ao número de graus de liberdade.

Para descrever o comportamento de uma estrutura complexa é necessário utilizar um modelo com multi - graus de liberdade, sendo que, para obter resultados óptimos, um número crescente de graus de liberdade têm de ser considerados.

Descrevendo o problema segundo as referências [3; 22], a equação que descreve o comportamento de uma estrutura com diversos graus de liberdade é a seguinte:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t) \quad (3.48)$$

onde M corresponde à matriz de massa, C à matriz de amortecimento, K à matriz de rigidez, P ao vector de forças e u ao vector de deslocamentos.

Para cada frequência existe um modo de deformação da estrutura correspondente, são chamados os modos próprios. Para a determinação das frequências naturais e respectivos modos próprios considera-se uma estrutura com amortecimento desprezável. Então, a equação (3.48) resulta na equação (3.49).

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (3.49)$$

Se $u(t) = 0$, a equação resulta no seguinte problema algébrico de valores próprios. Da resolução deste problema resultam as frequências naturais w_i .

$$\det(K - w_i^2 M) = 0 \quad (3.50)$$

3.4.1 Matriz de massa

O significado físico da matriz de massa é análogo ao significado físico da matriz de rigidez. Uma coluna j da matriz de massa de um elemento é um vector de cargas nodais que tem de ser aplicado ao elemento de forma a conservar o campo de aceleração criado pelo valor unitário do grau de liberdade associado. [3]

Sendo a massa de um uma camada dada por:

$$m = \rho dz B \frac{L}{2} \quad (3.51)$$

onde ρ corresponde à densidade do material, dz à altura do elemento, B à largura e L ao comprimento. Vem que o trabalho elementar é dado pela seguinte expressão.

$$w = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz B \frac{L}{2} \ddot{v} v = \rho B \frac{L}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \ddot{\theta} z \theta z dz \quad (3.52)$$

Derivando em ordem a θ obtém-se o momento, devido às forças de inércia.

$$\frac{\partial w_{rot}}{\partial \theta} = \rho B \frac{L}{2} \ddot{\theta} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \rho B \frac{L}{2} \ddot{\theta} I_{zz} \quad (3.53)$$

Geralmente, as matrizes de massa diagonais, conservam a massa do elemento dividindo a massa pelos elementos da sua diagonal enquanto os restantes são zero. No

entanto, para elementos com graus de liberdade de translação e de rotação, é necessário associar a massa com os graus de liberdade de rotação. Pode-se dizer que:

$$M_{22} = M_{44} = \rho A \frac{L^3}{24} \quad (3.54)$$

que representa o momento necessário para criar uma aceleração angular unitária de um elemento de comprimento L. Assim, a matriz de massa diagonal resulta na equação (3.55). [3]

$$M = \rho A \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^3}{24} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Capítulo 4

Ensaaios Experimentais

Neste capítulo é exposto o procedimento utilizado para o ensaio dinâmico experimental em que se pretende determinar a primeira frequência natural da vida *sandwich*.

O procedimento experimental utilizado para verificar a primeira frequência natural baseou-se na utilização de sensores piezoelétricos. Estes sensores são dispositivos que utilizam o efeito piezoelétrico, que consiste na acumulação de carga eléctrica em certos materiais sólidos quando sujeitos a uma pressão mecânica. São sensores finos, muito leves e de fácil colagem numa superfície plana. Possuem ainda propriedades eléctricas que permitem uma leitura directa através de um osciloscópio sem necessidade de amplificar o sinal.

4.1 Procedimento experimental

Encastrou-se uma viga *sandwich* com dimensões $L = 440$ mm, $b = 30$ mm e $h = 10$ mm onde cada uma das peles tem a espessura de 2 mm. A dimensão L refere-se à porção livre da viga já que o comprimento total é superior, sendo que o núcleo neste local é de alumínio como as peles de modo a permitir a fixação pretendida, este pormenor é visível na figura 4.1. As características de referência para o alumínio são $E = 70$ GPa, $\nu = 0.32$ e $\rho = 2710$ Kg m⁻³. Relativamente ao aglomerado de cortiça, $E = 12.4$ GPa, $\nu = 0$ e $\rho = 205$ Kg m⁻³. [21]



Figura 4.1: Pormenor do núcleo de alumínio no extremo encastrado.

Seguiu-se a colagem do sensor piezoelétrico e respectiva ligação ao osciloscópio. A figura 4.2 mostra a montagem da viga *sandwich* com o sensor aplicado.

Após a montagem da estrutura e estabelecida a ligação do sensor ao osciloscópio, excitou-se a estrutura aplicando uma pancada no extremo livre e deixou-se a viga vibrar

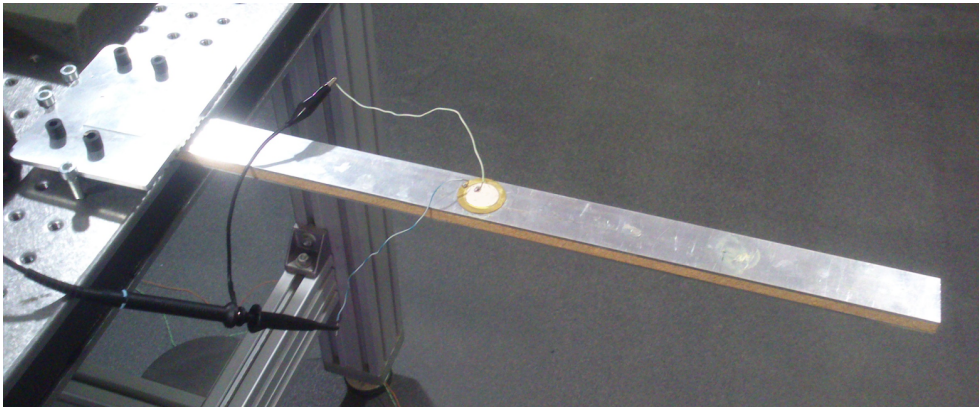


Figura 4.2: Montagem experimental.

livremente. Através dos dados recolhidos no osciloscópio determinou-se o período da onda. Pois, como sabido, o inverso do período resulta na frequência, que neste caso corresponde à primeira frequência natural do sistema. Na figura 4.3 observa-se o osciloscópio digital utilizado, tratando-se de um Uni-Trend UT3102G.

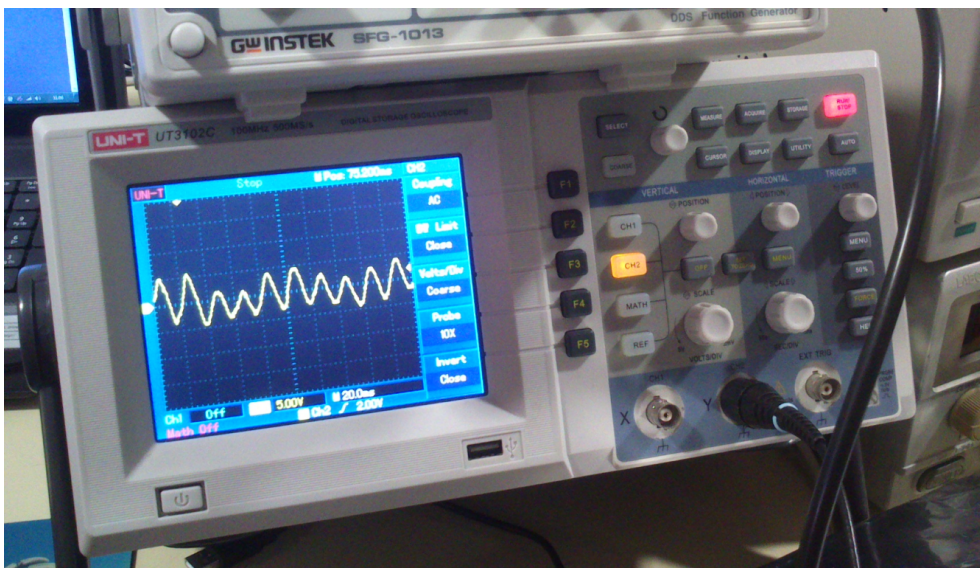


Figura 4.3: Osciloscópio utilizado na medição da onda.

Capítulo 5

Modelação Numérica

Ao longo do presente capítulo será explicado detalhadamente o procedimento adoptado para a simulação numérica recorrendo ao programa de simulação Abaqus. Incluindo o tipo de estruturas analisado, o tipo de análise feita, características da malha, como serão extraídos os dados, etc.

5.1 Programa de simulação Abaqus

Para a realização desta dissertação utilizou-se o programa de simulação Abaqus. O Abaqus é um pacote de software comercial para análise por elementos finitos, comercializado pela *Dassault Systemes*. Esta ferramenta é extremamente versátil, sendo muito utilizada em diversas indústrias, como a automóvel e a aeroespacial.

Possui a capacidade de analisar diferentes problemas, nomeadamente problemas estáticos, dinâmicos, termo-eléctricos, vibrações dinâmicas, transferência de calor, etc.

De um modo geral, para o estudo numérico dos diferentes problemas possíveis é necessário caracterizar o problema que se pretende analisar. Inicialmente, é necessário definir a estrutura, as características dos materiais, as cargas e condições fronteira assim como o tipo de contacto entre elementos. Após as etapas anteriores, é necessário definir o número de etapas para a realização da análise, a sua natureza, seja ela linear ou não, e finalmente a discretização da estrutura em elementos finitos.

5.2 Análise de viga homogénea

A seguinte modelação permitirá validar o método utilizado, na medida em que serão comparados os valores numéricos da matriz de rigidez com os valores teóricos, verificando o seu comportamento elástico, assim como a resposta dinâmica da estrutura.

Como referido em 2.2, de forma a construir a matriz de rigidez, é necessário estudar os casos da figura (2.1). O material utilizado na modelação foi o alumínio por uma questão de simplicidade, já que é constituinte da estrutura *sandwich*. Criou-se um modelo virtual 3D para simular a viga homogénea, recorrendo ao programa de simulação numérica *Abaqus* que se baseia no método dos elementos finitos. O primeiro passo foi criar um elemento sólido deformável. A viga extrudida tem um comprimento $L = 420\text{ mm}$, altura $h = 10\text{ mm}$ e largura $b = 40\text{ mm}$. De seguida criou-se o material desejado, neste caso

alumínio com as seguintes propriedades elásticas: Módulo de Young $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,32$. Material este que se associou à estrutura criada.

Tabela 5.1: Propriedades da malha na estrutura homogénea

Parte	Nós	Elementos	Tipo de elemento
Alumínio	26586	21000	C3D8I

5.2.1 Viga homogénea - 1º Caso

Após a construção da viga, definiram-se as condições de fronteira do problema (ver figura 2.1a). Como condições iniciais, encastrou-se um extremo e no outro aplicou-se uma carga P ao mesmo tempo que o movimento no eixo Z foi bloqueado, estas condições estão ilustradas na figura 5.1 (a). Foi então criado um *step* em que se aplicou uma tracção à superfície desejada. O valor da tracção aplicada calculou-se segundo a equação (5.1).

Procedeu-se então à simulação. Tendo em conta as condições de fronteira, obteve-se uma deformada de acordo com o esperado, ilustrada na figura 5.1c.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{-10}{40 \times 10} = -0.025 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (5.1)$$

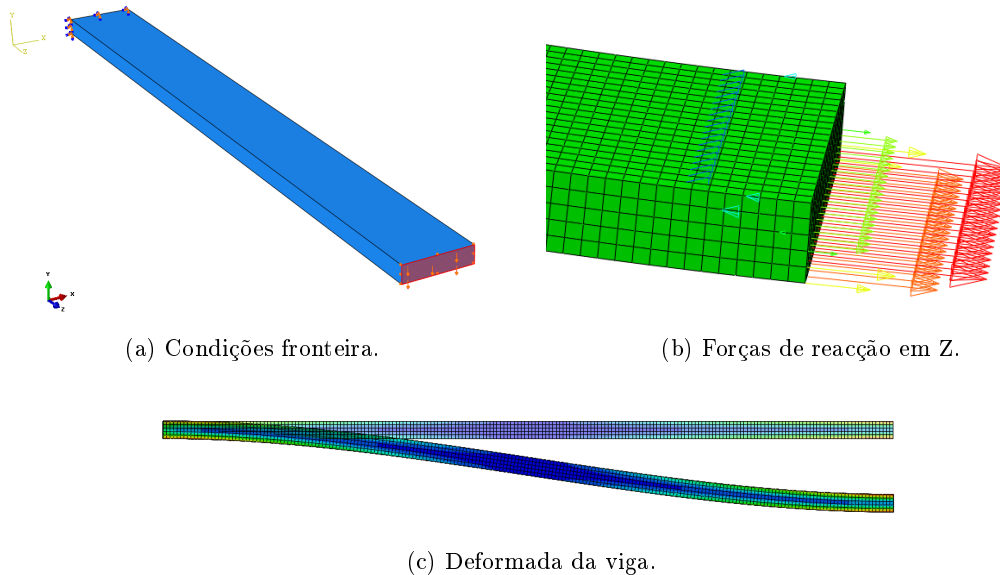


Figura 5.1: Viga homogénea - 1º Caso.

De acordo com a equação (2.3) e as condições de fronteira $\delta_i = 0$, $\theta_i = 0$, $\theta_j = 0$, vem

que:

$$\begin{bmatrix} F_{y_i} \\ M_i \\ F_{y_j} \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{bmatrix} \cdot \delta_j \quad (5.2)$$

Onde F_{y_j} corresponde à força aplicada ($-10N$), δ_j ao deslocamento segundo Y e M_j ao momento que resulta das forças de reacção no eixo Z de acordo com a figura 5.1b. O procedimento para calcular este momento foi multiplicar todas as forças que contribuíam para o momento pela respectiva distância ao eixo da secção, somando-as em valor absoluto.

5.2.2 Viga homogénea - 2º Caso

Neste caso, as condições de fronteira alteraram-se. Manteve-se o extremo encastrado, no entanto aplicou-se um momento segundo X no outro extremo e os seus pontos não se poderão deslocar segundo a direcção Y (ver figura 2.1 b)). Como não foi possível aplicar directamente o momento, decidiu-se forçar deslocamentos ao longo da face de modo a induzir o momento, como está ilustrado nas figuras 5.2 (a) e (b).

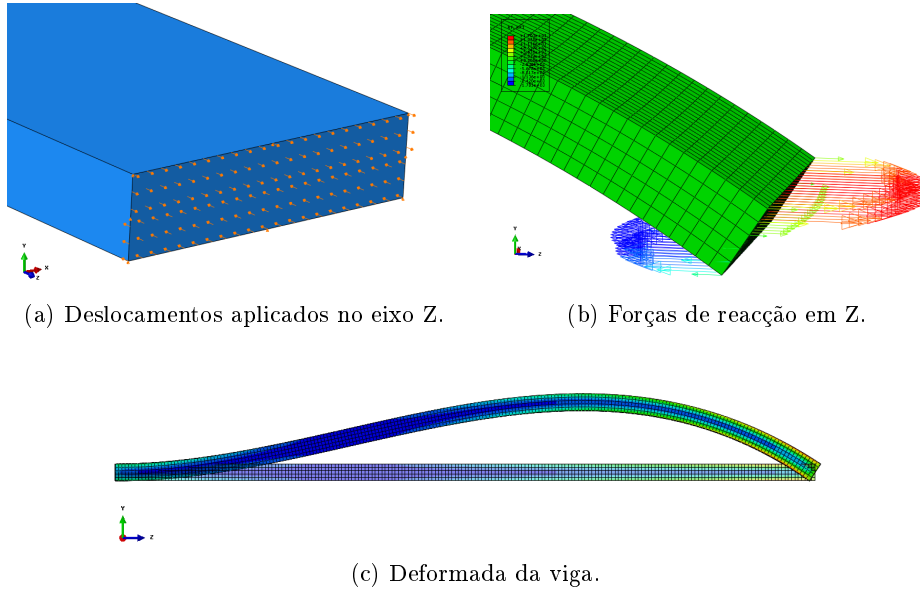


Figura 5.2: Viga homogénea - 2º Caso.

De acordo com a equação (2.3) e as condições de fronteira $\delta_i = 0$, $\theta_i = 0$, $\delta_j = 0$, vem que:

$$\begin{bmatrix} F_{y_i} \\ M_i \\ F_{y_j} \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{bmatrix} \cdot \theta_j \quad (5.3)$$

5.2.3 Viga homogénea - Frequências naturais

Como o estudo experimental incide sobre o caso de viga encastrada num extremo e livre no outro, também aqui se aplicam as mesmas condições fronteira. Neste caso criou-se um *step* do tipo *Frequency*. Começou-se por utilizar um elemento de 8 nós linear (C3D8R), tendo sido testado posteriormente um elemento de 20 nós quadrático (C3D20R), o que proporcionou um resultado mais exacto. Na figura 5.3 estão ilustrados os seis primeiros modos próprios e frequências utilizando o elemento C3D20R. No entanto, as frequências de interesse neste trabalho são as frequências que estão relacionadas com a vibração transversal, que correspondem às situações (a), (c) e (d) da respectiva figura.

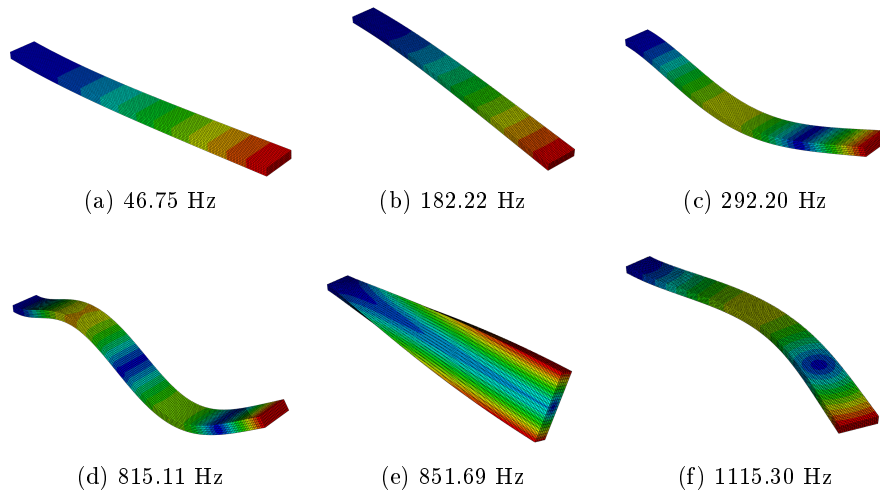


Figura 5.3: As seis primeiras frequências e modos próprios - viga homogénea.

5.3 Análise de viga *sandwich*

Após a verificação e confirmação do comportamento da viga homogénea, partiu-se para a modelação da viga *sandwich*. A simulação seguiu o procedimento adoptado em 5.2, salvo as inerentes diferenças na sua estrutura e condições de contacto.

Neste caso, criaram-se três corpos sólidos deformáveis. Dois corpos iguais correspondentes às peles da estrutura *sandwich*, definidos como alumínio, $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,32$. O outro corpo corresponde ao núcleo da estrutura e as propriedades atribuídas correspondem às do aglomerado de cortiça referidas em [21], $E = 12,4 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0$. Procedeu-se então à montagem, e finalmente à imposição de uma restrição do tipo *tie* entre o núcleo e as peles. As propriedades da malha aplicada estão descritas na tabela 5.2.

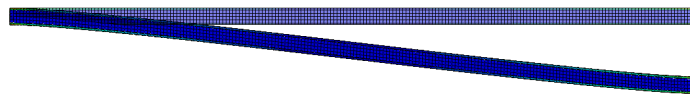
5.3.1 Viga *sandwich* - 1º Caso

O procedimento é equivalente ao da viga homogénea (ver secção 5.2.1).

De acordo com a equação 2.3 e as condições de fronteira $\delta_j = 0$, $\theta_i = 0$, $\theta_j = 0$, vem

Tabela 5.2: Propriedades da malha na estrutura *sandwich*

Parte	Nós	Elementos	Tipo de elemento
Alumínio topo	8862	4200	C3D8I
Cortiça	22155	16800	
Alumínio base	8862	4200	

Figura 5.4: Deformada da viga *sandwich* - 1º Caso.

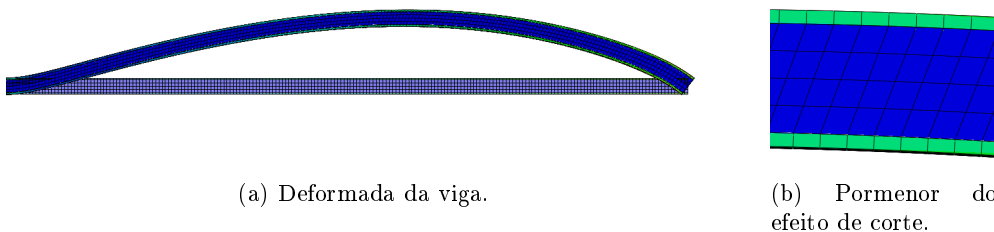
que:

$$\begin{bmatrix} F_{y_i} \\ M_i \\ F_{y_j} \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{bmatrix} \cdot \delta_j \quad (5.4)$$

Para este caso, a viga comportou-se de maneira aproximada ao previsto. No entanto, a sua deformada (figura 5.4) apresenta ligeiras diferenças em relação à da viga homogénea. Os coeficientes obtidos serão comparados num capítulo mais à frente.

5.3.2 Viga *sandwich* - 2º Caso

De acordo com 5.2.2, manteve-se o extremo encastrado e forçou-se os deslocamentos ao longo da face do outro extremo de forma a induzir o momento.

Figura 5.5: Viga *sandwich* - 2º Caso

Neste caso a viga tem um comportamento diferente do esperado, comparando com o resultado da viga homogénea. O diferente comportamento, é resultado do efeito de corte no núcleo da estrutura *sandwich*. Na figura 5.5, é possível verificar a diferença

na deformação, assim como a presença do efeito de corte. A diferença encontrada na deformada da viga tem implicações no valor dos coeficientes da matriz de rigidez, já que a teoria desenvolvida é baseada na curvatura de uma viga homogênea.

5.3.3 Viga *sandwich* - Frequências naturais

De forma análoga à secção 5.2.3, criou-se um modelo para a estrutura *sandwich*. Na figura 5.6 estão representados os modos e as frequências, onde as de interesse correspondem aos casos (a), (b), (e) e (f).

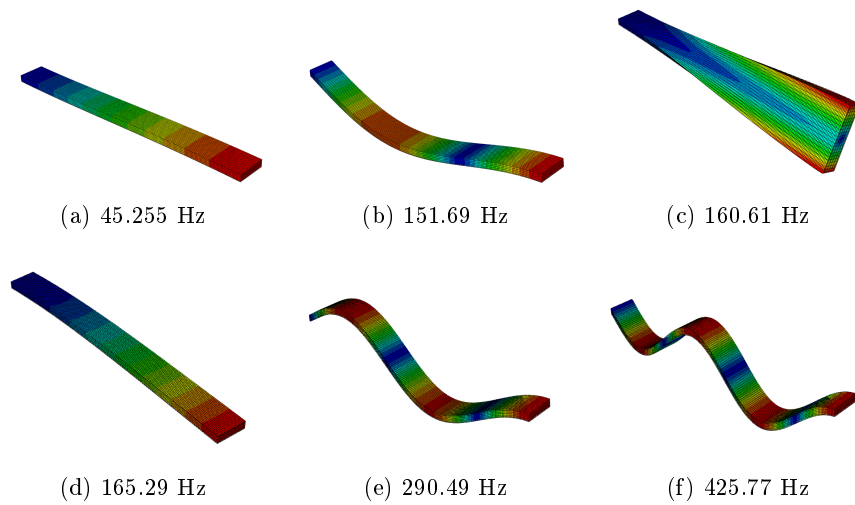


Figura 5.6: As seis primeiras frequências e modos próprios - viga *sandwich*.

Parte III

Resultados e Discussão

Capítulo 6

Resultados Experimentais

Neste capítulo vão ser expostos os resultados provenientes do procedimento experimental. Apesar de o processo ser muito simples, é possível determinar a primeira frequência com um erro relativamente baixo.

6.1 Primeira frequência natural da viga *sandwich*

Na figura 6.1 está ilustrada a leitura efectuada no ensaio experimental, na qual se mediu o tempo necessário para um ciclo completo de vibração.



Figura 6.1: Leitura do sensor piezoeléctrico.

Então, a primeira frequência natural da estrutura resultou em:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.022} = 45,45\text{Hz} \quad (6.1)$$

O resultado gráfico para a aceleração da viga mostrou um resultado próximo ao obtido no modelo numérico.

Considerando as possíveis fontes de erro na leitura, destacam-se as seguintes:

- As pontas de prova que ligam o sensor piezoelétrico ao osciloscópio podem acrescentar arrasto aerodinâmico e efeito de inércia, aumentando o amortecimento da vibração.
- A camada de cola utilizada na ligação entre o sensor e a viga também pode funcionar como amortecedor e provocar ligeiras alterações no sinal obtido pelo sensor.

Deste modo, e tendo também em conta que tanto as propriedades mecânicas dos materiais possuem uma tolerância, como existe a possibilidade do aglomerado de cortiça ter alterado as suas propriedades com o tempo, aceita-se o valor obtido para a primeira frequência natural.

Capítulo 7

Resultados Numéricos

Ao longo deste capítulo, serão apresentados os resultados da formulação analítica assim como da simulação numérica das vigas consideradas. Começando pela viga homogênea, onde os resultados servirão para validar os procedimentos, seguindo-se os resultados da viga *sandwich*.

7.1 Viga homogênea

7.1.1 Coeficientes da matriz de rigidez

Em primeiro lugar, determinaram-se os coeficientes da matriz de rigidez teórica da viga homogênea segundo a equação (2.4), utilizando para tal os valores de referência $E = 70$ GPa, $I = 3.333 \times 10^{-9} m^4$ e $L = 0,420$ m. Estes coeficientes estão agrupados na tabela 7.1, onde os valores estão representados segundo as unidades do sistema internacional.

Tabela 7.1: Coeficientes teóricos da matriz de rigidez da viga homogênea.

Caso 1		Caso 2	
K_{i3} [SI]	Teórico	K_{i4} [SI]	Teórico
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-37793,00	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	7936,00
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-7936,00	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	1111,00
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	37793,00	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-7936,00
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-7936,00	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	2222,00

De seguida, determinaram-se os coeficientes da matriz de rigidez da viga homogênea segundo o procedimento descrito na secção 5.2.

Tabela 7.2: Coeficientes numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga homogénea.

Caso 1		Caso 2	
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i>	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i>
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-38018,17	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	7951,31
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-8006,70	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	1107,03
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	38017,82	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-7951,32
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-7960,82	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	2221,09

7.1.2 Frequências naturais

No passo seguinte, calculou-se a matriz de massa (M) da viga homogénea segundo a equação (3.55), onde $L = 0,420 \text{ m}$, $A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e $\rho = 2710 \text{ Kg/m}^3$.

$$M = \langle 0.2276 \quad 0.0033 \quad 0.2276 \quad 0.0033 \rangle_{diag} [\text{SI}] \quad (7.1)$$

Após a obtenção das matrizes de rigidez e massa, passou-se para a análise dinâmica da estrutura. Foram consideradas as condições explicadas em 3.4 e resolveu-se a equação (3.50), considerando as matrizes de rigidez e de massa. A matriz resultante é constituída na sua diagonal pelo quadrado das frequências naturais, frequências estas expressas em radianos por segundo. Então, sabendo que $w_i = \sqrt{w_i^2} [\text{rad/s}]$ e $f = \frac{w_i}{2\pi} [\text{Hz}]$ vem que:

$$f = \langle 29.626 \quad 141.947 \rangle_{diag} [\text{Hz}] \quad (7.2)$$

No entanto, estes valores de frequências naturais, quando comparados com os teóricos, aparentam estar errados, porém, e como explicado em [23], estes valores têm associados um erro muito grande devido ao facto de serem determinados recorrendo a apenas uma divisão da estrutura. O que no caso da estrutura *sandwich* revelar-se-á crítico tendo em conta a dificuldade em manipular a matriz de rigidez em função do comprimento do elemento. Para demonstrar tal fenómeno elaborou-se um programa em Matlab presente no anexo A.2, onde se começou por calcular as primeiras três frequências naturais para um só elemento e de seguida aumentou-se progressivamente o número de divisões até se aproximar do valor de convergência. Estão expostos na tabela 7.3 os valores das frequências naturais e respectivo erro associado consoante o número de divisões do elemento.

Relativamente aos resultados do modelo numérico em Abaqus, comparou-se os resultados obtidos através da utilização de dois elementos de malha diferentes, com o intuito de aproximar o mais possível dos valores teóricos. Estes resultados estão tabelados em 7.4. Analisando a tabela, conclui-se que o modelo numérico em Abaqus reproduz com exactidão o modelo teórico. Deste modo, a utilização do programa numérico para o estudo dinâmico da estrutura *sandwich* fica validada.

Tabela 7.3: Erro na determinação das primeiras três frequências naturais.

	1ª Freq		2ª Freq		3ª Freq	
Teórico	46.537		291.633		816.747	
Nº Divisões	[Hz]	Erro [%]	[Hz]	Erro [%]	[Hz]	Erro[%]
1	29,626	36,339	141,947	51,332		
2	40,183	13,654	191,458	34,356	445,587	45,444
3	43,431	6,673	227,612	21,961	557,861	31,697
4	44,730	3,884	249,305	14,523	628,506	23,048
5	45,363	2,523	262,238	10,089	676,867	17,126
6	45,716	1,764	270,264	7,337	710,427	13,017
7	45,932	1,300	275,491	5,545	734,029	10,128
8	46,073	0,997	279,052	4,324	750,957	8,055
9	46,170	0,788	281,572	3,460	763,371	6,535
10	46,241	0,636	283,416	2,828	772,681	5,395
11	46,292	0,526	284,802	2,352	779,808	4,523
12	46,332	0,440	285,870	1,986	785,369	3,842

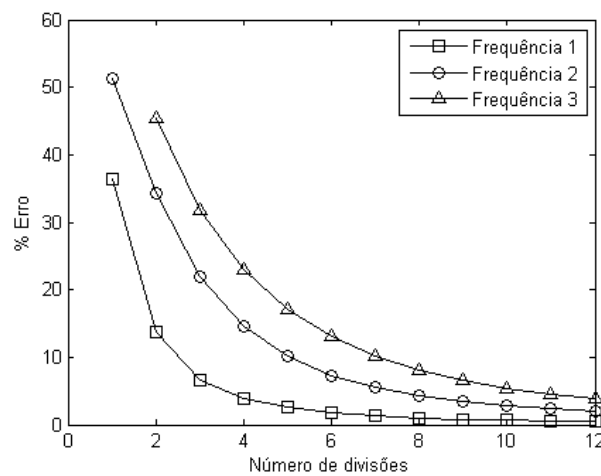


Figura 7.1: Erro associado à determinação das primeiras três frequências naturais.

Tabela 7.4: Frequências naturais - Viga homogênea.

Modo	Teórico [Hz]	C3D8R [Hz]	Erro [%]	C3D20R [Hz]	Erro [%]
1	46.53	44.81	3.69	46.75	0.48
2	291.67	286.35	1.82	292.20	0.18
3	816.69	798.88	2.18	815.11	0.19
4	1600.40	1557.70	2.67	1589.10	0.71

7.2 Viga *sandwich* - diferentes núcleos

7.2.1 Coeficientes da matriz de rigidez

Sabendo que a composição do núcleo tem muita influência no comportamento da estrutura *sandwich*, decidiu-se estudar o seu comportamento para outros valores de módulo de Young do núcleo. Além do valor do aglomerado de cortiça $E = 12.4$ MPa, simulou-se para outros valores superiores que se aproximassem mais do valor do alumínio. Foram eles $E = 30$ GPa e $E = 60$ GPa. Estudaram-se os dois casos necessários para a compreensão do seu comportamento e os resultados foram comparados com os valores teóricos obtidos pela formulação desenvolvida.

Tabela 7.5: Coeficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga *sandwich* - $E_{nucleo} = 12$ MPa

Caso 1		Caso 2	
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-4766,21 -18446,00	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	1018,40 3873,70
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-1002,56 -3873,70	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	121,34 542,32
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	4766,22 18446,00	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-1018,45 -3873,70
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-999,25 -3873,70	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	488,83 1084,60

Tabela 7.6: Coeficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga *sandwich* - $E_{nucleo} = 30$ GPa

Caso 1		Caso 2	
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-27344,72 -26736,00	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	5841,52 5614,50
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-5750,78 -5614,50	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	819,30 786,03
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	27344,82 26736,00	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-5841,52 -5614,50
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-5734,04 -5614,50	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	1634,14 1572,10

Tabela 7.7: Coeficientes analíticos e numéricos (Abaqus) da matriz de rigidez da viga *sandwich* - $E_{nucleo} = 60$ GPa

Caso 1		Caso 2	
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-35945,28 -35029,00	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	7065,08 7356,00
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-7555,99 -7356,00	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	990,50 1029,80
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	35945,36 35029,00	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-7065,13 -7356,00
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-7541,07 -7356,00	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	1976,84 2059,70

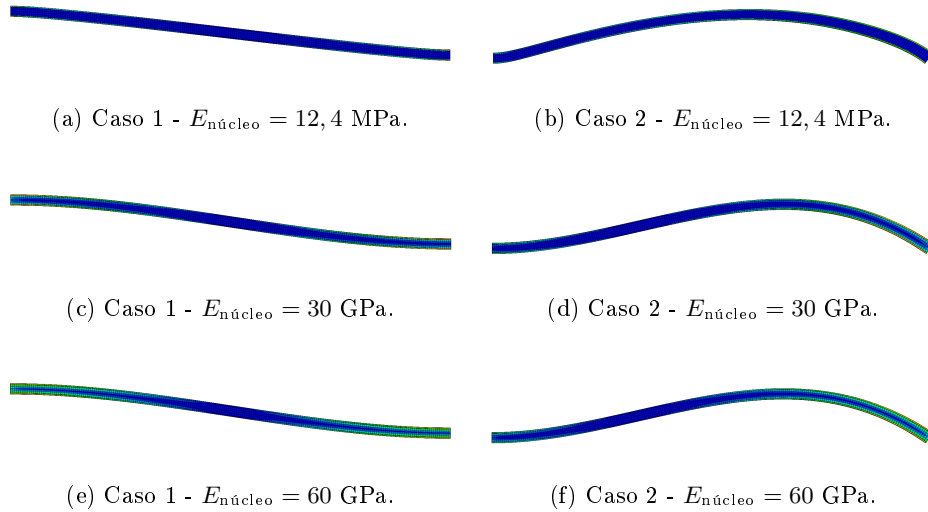


Figura 7.2: Comportamento da viga *sandwich* com o aumento do módulo de Young do material do núcleo no caso de deslocamento forçado.

Relativamente às deformadas, na figura 7.2 pode-se observar a evolução do comportamento da estrutura associado aos casos de deslocamento ou rotação imposta, relativamente aos valores de módulo de Young do núcleo de 12.4 MPa, 30 GPa e 60 GPa. Constata-se que no caso de $E_{nucleo} = 12.4$ MPa o núcleo não possui rigidez suficiente, o que provoca que a deformada da viga não corresponda ao modelo esperado. O que ajuda a demonstrar a razão da discrepância no cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez da viga *sandwich*. Nos casos em que a rigidez do núcleo é superior à anterior, o comportamento tende a aproximar-se da deformada esperado, o que equivale a dizer que os coeficientes calculados estarão à partida mais aproximados aos reais.

7.2.2 Tensão de corte

Baseando na formulação relativa às tensões de corte apresentada em 3.3.2, elaborou-se um gráfico de distribuição das tensões de corte na viga *sandwich*. Para tal, foi necessário calcular o valor do esforço transversal entre os pontos assinalados na figura 7.3. Os dois pontos superiores dizem respeito à zona de contacto entre o núcleo e as peles, e os pontos inferiores correspondem ao interior do núcleo. Para a determinação do esforço

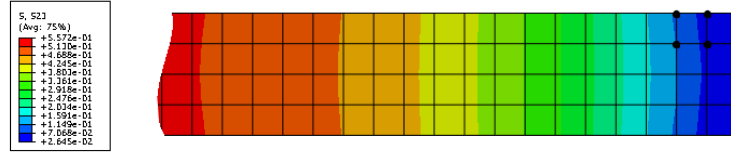


Figura 7.3: Distribuição da tensão de corte no núcleo.

longitudinal entre os dois pontos superiores, calculou-se o valor médio das tensões normais dos nós em profundidade, que não estão ilustrados na figura, e dividiu-se a sua diferença pela distância entre eles, e resultou em:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 11.187 \quad (7.3)$$

Para os pontos inferiores utilizou-se o mesmo procedimento e obteve-se:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0.00222 \quad (7.4)$$

Então, após este processo e recorrendo às equações (3.46) e (3.47) obteve-se o seguinte gráfico de distribuição de tensões de corte numa viga *sandwich*.

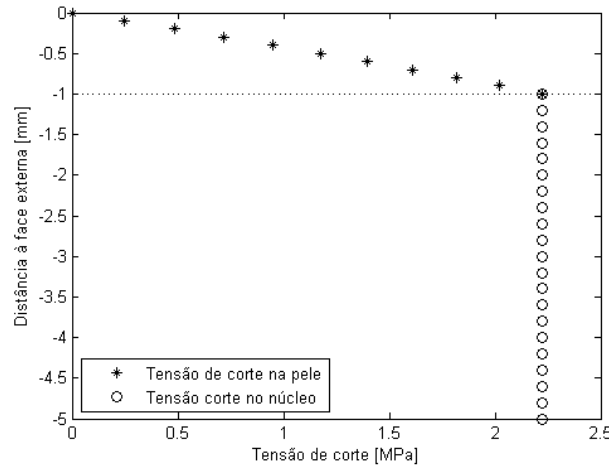


Figura 7.4: Distribuição da tensão de corte numa viga *sandwich*.

Como se pode observar neste gráfico e de acordo com a figura anterior, a tensão de corte no núcleo mantém-se praticamente constante, ao contrário do que acontece normalmente para materiais homogêneos, onde o seu crescimento é parabólico.

7.2.3 Tensão de Cedência de Von Mises

De modo a calcular a tensão de Von Mises correspondente ao núcleo, extraíram-se do programa de simulação as tensões máximas a que o núcleo está sujeito para a situação de rotação imposta ($\simeq 0.2$ rad). As tensões estão representadas na seguinte tabela 7.8. Aplicando a equação do critério de cedência de Von Mises, vem que:

Tabela 7.8: Tensões máximas aplicadas no núcleo[MPa].

$\sigma_{xx} = 3.81 \times 10^{-2}$	$\tau_{xy} = 5.57 \times 10^{-1}$
$\sigma_{yy} = 1.27 \times 10^{-1}$	$\tau_{yz} = 1.82 \times 10^{-2}$
$\sigma_{zz} = 1.66 \times 10^{-2}$	$\tau_{xz} = 7.13 \times 10^{-3}$

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (7.5) \\ &= 1.373 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Este valor é menor do que a tensão de cedência para o aglomerado de cortiça, o aglomerado começa a desagregar-se para valores de 7-8 MPa. A tensão de Von Mises resultante representa a tensão à qual o adesivo que garante a união entre peles e núcleo tem que resistir. Assim, conclui-se que o núcleo permanece no regime elástico para este valor de tensão.

7.2.4 Frequências naturais

Segundo as novas dimensões consideradas para a estrutura, referidas na secção 4.1, as primeiras frequências naturais longitudinais obtidas através do programa de simulação Abaqus, estão representadas na seguinte tabela.

Tabela 7.9: Frequências naturais - Viga *sandwich*.

Modo	Numérico [Hz]
1	39,71
2	125,69
3	231,53

7.2.5 Outras soluções construtivas

Foi elaborado um modelo da estrutura *sandwich* para o caso de um núcleo celular simples. Variou-se o módulo de Young do material do núcleo com o intuito de analisar a influência desta variação no comportamento da estrutura. Neste caso, o núcleo está dividido em quatro células, sendo que as paredes de divisão são do mesmo material que as peles e possuem uma espessura de 4mm. Na figura 7.5, é possível observar a aproximação do comportamento da viga celular ao do comportamento de uma viga homogênea a partir de um valor de rigidez do núcleo igual a 250 MPa. Para as situações anteriores, o núcleo não apresenta rigidez suficiente e permite flexão excessiva.

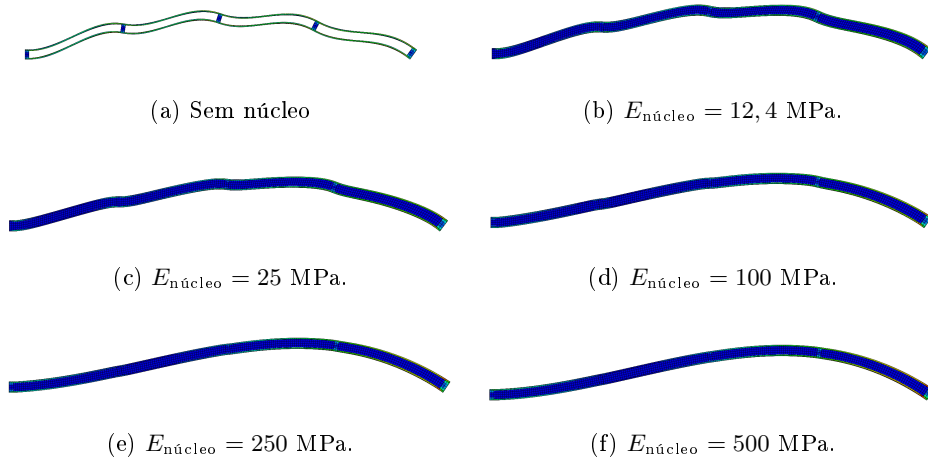


Figura 7.5: Comportamento de uma viga *sandwich* celular segundo uma rotação imposta.

Uma construção deste tipo permitirá baixar a massa da estrutura sem perda de rigidez. Uma tecnologia baseada neste conceito de estrutura celular, no entanto mais evoluída e já muito aplicada é o conhecido núcleo em favo de mel.

Capítulo 8

Comparação e discussão dos resultados

Neste capítulo comparam-se de uma maneira geral todos os resultados obtidos nesta dissertação, sejam eles analíticos, numéricos ou experimentais. O principal objectivo desta comparação é compreender o resultado e comportamento da formulação desenvolvida para vigas *sandwich* em relação ao comportamento real destas estruturas.

8.1 Comparação dos resultados da viga homogénea

Na tabela 8.1, é possível comparar os resultados obtidos e o respectivo erro associado relativamente aos coeficientes da matriz de rigidez da viga homogénea. Os coeficientes resultantes do modelo em Abaqus, são muito próximos dos valores teóricos e de sinais iguais. Então, através da análise da tabela, conclui-se que o modelo em Abaqus da viga homogénea aproxima-se com muita exactidão dos valores teóricos.

Tabela 8.1: Comparação de resultados obtidos teoricamente e através do Abaqus para a viga homogénea.

Caso 1			Caso 2		
K_{i3} [SI]	$Abaqus$ Teórico	Erro (%)	K_{i4} [SI]	$Abaqus$ Teórico	Erro (%)
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-38018,17 -37793,00	0,59	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	7951,31 7936,00	0,19
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-8006,70 -7936,00	0,88	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	1107,03 1111,00	0,36
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	38017,90 37793,00	0,59	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-7951,32 -7936,00	0,19
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-7960,82 -7936,00	0,31	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	2221,09 2222,00	0,04

Na figura 8.1, estão ilustrados os resultados da tabela anterior em módulo, para melhor visualização dos resultados obtidos.

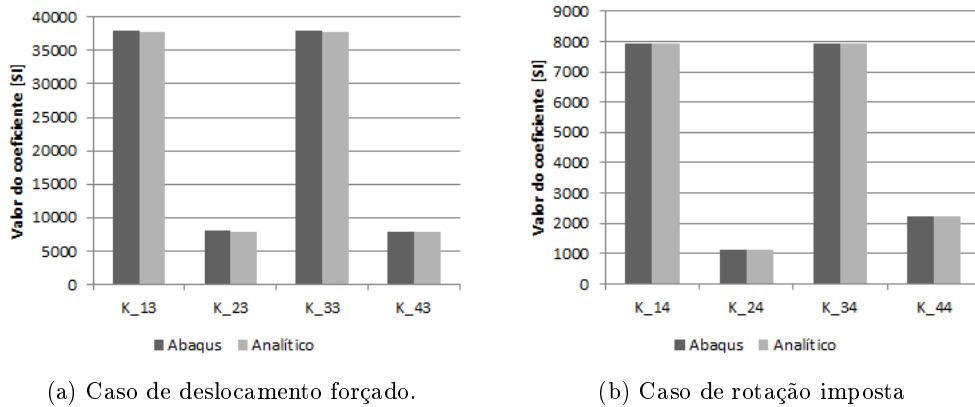


Figura 8.1: Comparação dos resultados da viga homogênea.

Fazendo uma análise inversa e recorrendo aos valores dos coeficientes teóricos para uma viga homogênea, referidos na equação matricial 2.4, é possível determinar o valor do módulo de Young equivalente. Estes valores estão tabelados em 8.2. Como expectável, neste caso de viga homogênea os resultados indicam um valor à volta dos 70 GPa, independentemente de serem obtidos analiticamente ou através do Abaqus. Estes valores servem apenas para fazer a analogia e comparação com o caso de viga *sandwich*, onde os valores de módulo de Young diferem dependendo do coeficiente associado e método de cálculo.

Tabela 8.2: Módulo de Young equivalente - viga homogênea.

Caso 1			Caso 2		
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	E [GPa]	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	E [GPa]
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-38018,17 -37793,00	70,49 70,07	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	7951,31 7936,00	70,20 70,07
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-8006,70 -7936,00	70,69 70,07	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	1107,03 1111,00	69,81 70,06
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	38017,90 37793,00	70,49 70,07	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-7951,32 -7936,00	70,20 70,07
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-7960,82 -7936,00	70,28 70,07	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	2221,09 2222,00	70,03 70,06

8.2 Comparação dos resultados da viga *sandwich*

Analisando as tabelas 8.3 e 8.4 ou observando as figuras 8.2 e 8.3, verifica-se que os resultados numéricos obtidos no Abaqus aproximam-se dos valores teóricos excepto para o valor de 12.4 MPa, onde a variação percentual é extremamente elevada. Sendo assim, pode-se concluir que o modelo desenvolvido no programa de simulação aproxima-se da realidade, enquanto que as equações teóricas não se aplicam com exactidão nas estruturas *sandwich*, especialmente para valores de rigidez muito díspares entre os componentes.

Tabela 8.3: Caso 1 - deslocamento forçado. Comparação de resultados obtidos analiticamente e através do Abaqus para outros valores de módulo de Young do núcleo.

	12.4 MPa		30 GPa		60 GPa	
	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-4766,21 -18446,00	287,02	-27344,72 -26736,00	2,23	-35945,28 -35029,00	2,55
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-1002,56 -3873,70	286,38	-5750,78 -5614,50	2,37	-7555,99 -7356,00	2,65
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	4766,22 18446,00	287,02	27344,82 26736,00	2,23	35945,36 35029,00	2,55
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-999,25 -3873,70	287,66	-5734,04 -5614,50	2,08	-7541,07 -7356,00	2,45

Tabela 8.4: Caso 2 - Rotação imposta. Comparação de resultados obtidos teoricamente e através do Abaqus para outros valores de módulo de Young do núcleo.

	12.4 MPa		30 GPa		60 GPa	
	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)	<i>Abaqus</i> Teórico	Erro (%)
$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	1018,40 3873,70	280,37	5841,52 5614,50	3,89	7670,70 7356,00	4,10
$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	121,34 542,32	346,95	819,30 786,03	4,06	1075,20 1029,80	4,22
$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-1018,45 -3873,70	280,35	-5841,52 -5614,50	3,89	-7670,70 -7356,00	4,10
$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	488,83 1084,60	121,88	1634,14 1572,10	3,80	2146,51 2059,70	4,04

Tal como na viga homogênea, calcularam-se os valores do módulo de Young equivalente da estrutura, os resultados estão tabelados em 8.5.

Porém, e analisando a figura 8.4, constata-se que na realidade a estrutura é menos rígida do que a formulação teórica prevê. Relativamente ao caso de deslocamento im-

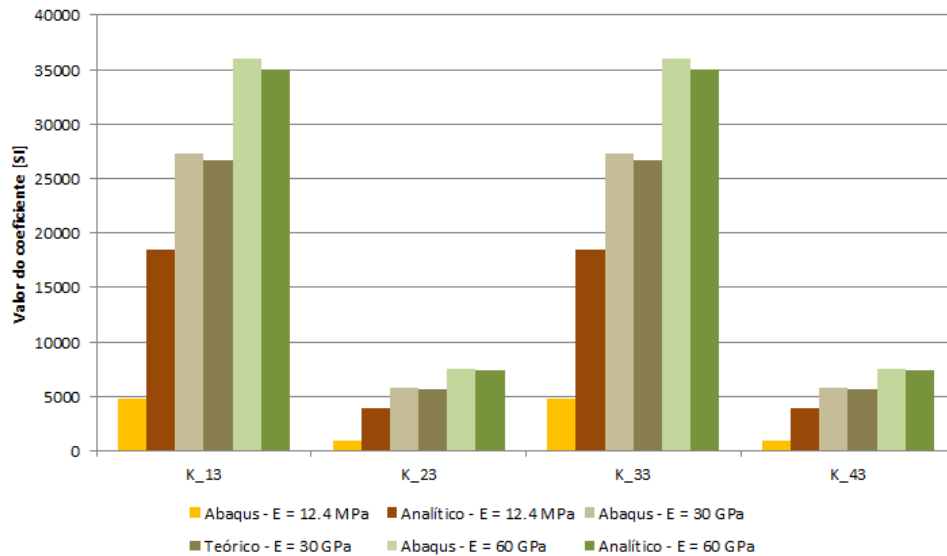


Figura 8.2: Comparação dos resultados da viga *sandwich* para diferentes núcleos - Caso de deslocamento forçado.

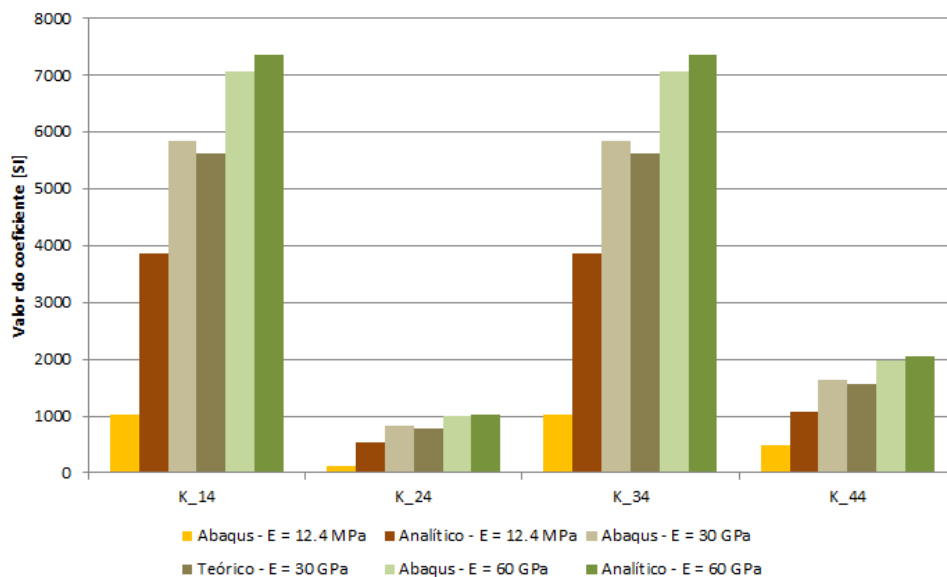


Figura 8.3: Comparação dos resultados da viga *sandwich* para diferentes núcleos - Caso de rotação imposta.

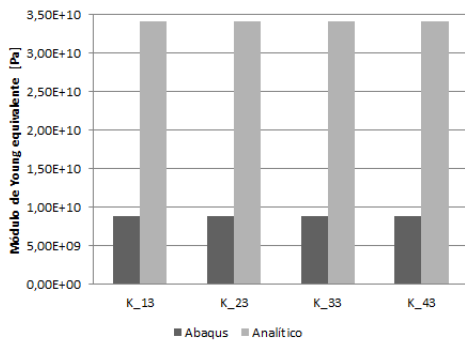
posto, os valores numéricos apresentam um E quatro vezes inferior independentemente do coeficiente associado. No entanto, no caso de rotação imposta e especialmente nos valores associados aos coeficientes K_{24} e K_{44} , a relação entre os coeficientes não é constante. Assim como os valores referentes aos coeficientes analíticos são ainda mais baixos do que os do primeiro caso.

Fazendo a mesma análise para uma estrutura com um núcleo de rigidez 30 GPa verifica-se que o valor do módulo de Young equivalente já se comporta como a viga

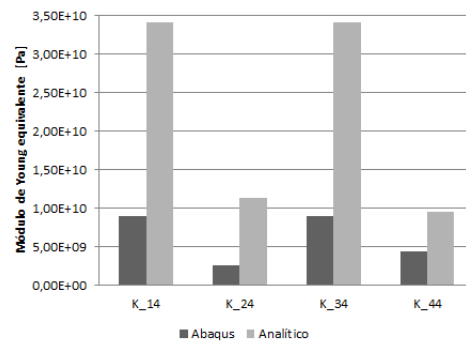
homogénea, como ilustrado na figura 8.5.

Tabela 8.5: Módulo de Young equivalente - viga *sandwich*.

Caso 1			Caso 2		
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	E [GPa]	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	E [GPa]
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-4766,21 -18446,00	8,83 34,17	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	1018,40 3873,70	8,99 34,20
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-1002,56 -3873,70	8,84 34,17	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	121,34 542,32	2,55 11,40
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	4766,22 18446,00	8,83 34,17	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-1018,45 -3873,70	8,99 34,20
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-999,25 -3873,70	8,81 34,17	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	488,83 1084,60	4,31 9,57

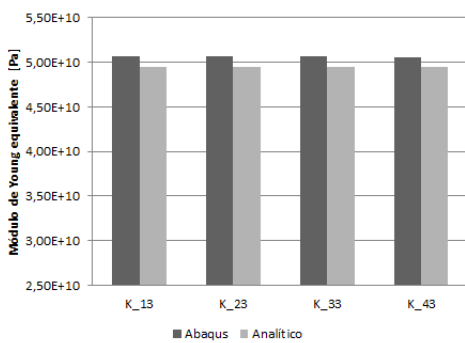


(a) Caso de deslocamento imposto.

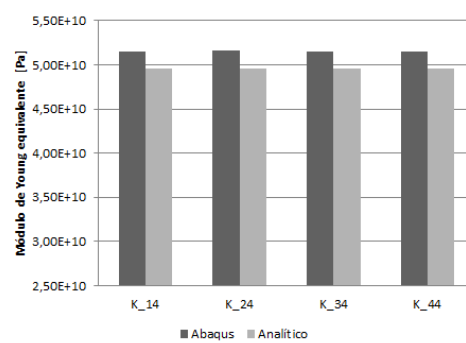


(b) Caso de rotação imposta.

Figura 8.4: Módulo de Young equivalente - núcleo de 12.4 MPa.



(a) Caso de deslocamento imposto.



(b) Caso de rotação imposta.

Figura 8.5: Módulo de Young equivalente - núcleo de 30 GPa.

Na tabela 8.6, são propostos factores de correcção para os coeficientes da matriz de rigidez da viga *sandwich*. Estes factores representam o valor pelo qual os coeficientes teóricos têm de ser multiplicados de forma a obter os coeficientes reais para esta viga *sandwich*.

Tabela 8.6: Factores de correcção propostos.

Caso 1			Caso 2		
K_{i3} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	Factor correcção	K_{i4} [SI]	<i>Abaqus</i> Teórico	Factor correcção
$K_{13} = \frac{F_i}{\delta_j}$	-4766,21 -18446,00	0,258	$K_{14} = \frac{F_i}{\theta_j}$	1018,40 3873,70	0,263
$K_{23} = \frac{M_i}{\delta_j}$	-1002,56 -3873,70	0,259	$K_{24} = \frac{M_i}{\theta_j}$	121,34 542,32	0,224
$K_{33} = \frac{F_j}{\delta_j}$	4766,22 18446,00	0,258	$K_{34} = \frac{F_j}{\theta_j}$	-1018,45 -3873,70	0,263
$K_{43} = \frac{M_j}{\delta_j}$	-999,25 -3873,70	0,258	$K_{44} = \frac{M_j}{\theta_j}$	488,83 1084,60	0,451

No que toca ao estudo dinâmico da estrutura, estudaram-se as vibrações de uma viga encastrada - livre segundo três abordagens diferentes. Uma aproximação teórica, como escrutinado em 7.1.2, uma aproximação numérica recorrendo ao programa Abaqus, assim como uma aproximação experimental (Foram consideradas as alterações de dimensões na viga usada e refeitos os cálculos para esta nova estrutura). Tendo em conta que através do procedimento experimental utilizado apenas foi possível determinar a primeira frequência natural da estrutura, a comparação dos resultados representada na seguinte tabela irá reduzir-se à primeira frequência natural.

Tabela 8.7: Frequências naturais - Viga *sandwich*.

Modo	Analítico [Hz]	Numérico [Hz]	Experimental [Hz]
1	31,36	39,71	45,45

Analisando a tabela 8.7, verifica-se que o valor analítico apresenta um desvio muito grande em relação ao valor de referência, o que vai de encontro ao demonstrado na secção 7.1.2. O resultado numérico e o experimental apresentam valores mais próximos, e tendo em conta o procedimento experimental, o erro de 14,5% acaba por ser admissível.

8.3 Coeficientes de correção propostos

Finalmente, são propostos nesta secção, factores de correcção para os coeficientes determinados analiticamente. Ao fazer a multiplicação por estes factores, os coeficientes aproximam-se dos obtidos por elementos finitos, o que garante resultados mais apurados.

Em primeiro lugar, recorrendo ao Abaqus, variou-se o módulo de Young do material do núcleo (7 GPa, 30 GPa e 60 GPa) para uma viga onde cada pele tem espessura de 1 mm, núcleo de 8 mm, $L = 420$ mm e $b = 40$ mm. Analisou-se separadamente os casos de deslocamento e rotação impostos, comparando cada um dos coeficientes da matriz de rigidez obtidos com os coeficientes analíticos.

O seguinte gráfico 8.6 é o resultado de tal estudo. Verificou-se que com o aumento da rigidez do núcleo, o erro aumenta ligeiramente, sendo necessário um factor de correcção superior. Apesar das duas linhas terem comportamento semelhante, o caso de rotação imposta é mais crítico, apresentando um desvio sempre superior em relação ao outro caso.

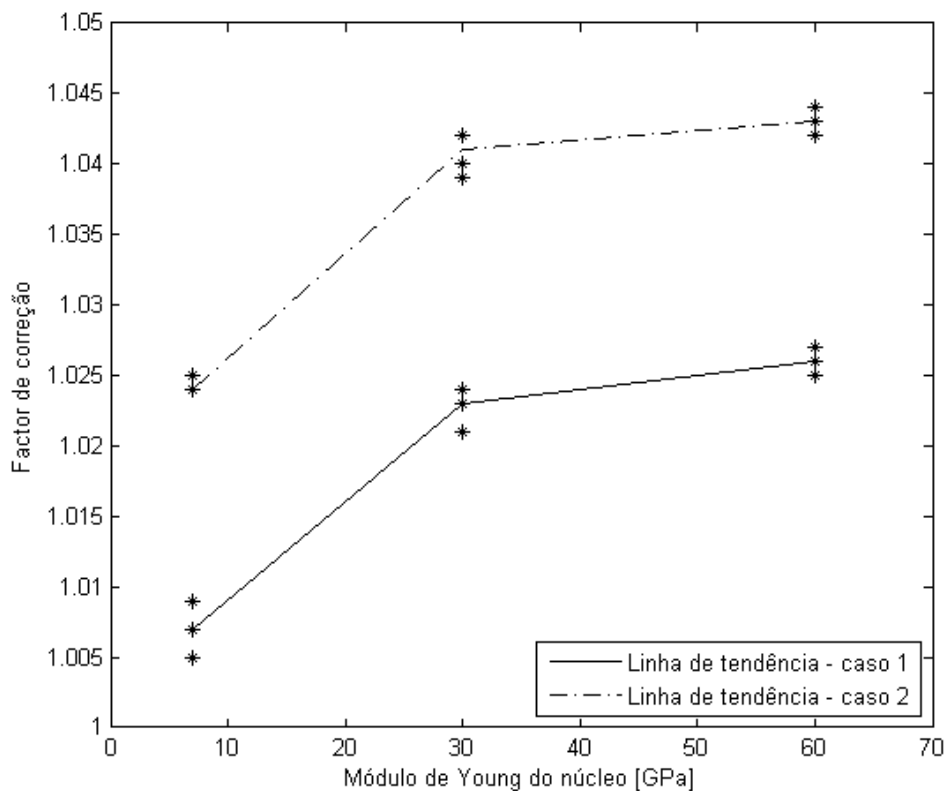


Figura 8.6: Factores de correcção propostos para diferentes valores do módulo de Young do núcleo.

De seguida, partindo de uma viga com as mesmas dimensões, e módulo de Young do núcleo de 7 GPa, correspondente a 10% do módulo das peles, variou-se o rácio das espessuras peles/núcleo. Como se pode analisar em 8.7, nesta situação os dois casos comportam-se de maneira muito diferente. Por um lado, a linha de tendência corres-

pondente ao caso de deslocamento imposto mostra que praticamente não existe relação entre o parâmetro variado e o erro associado. Porém, no outro caso, o rácio das espessuras mostra grande relação com o factor de correcção necessário para os respectivos coeficientes.

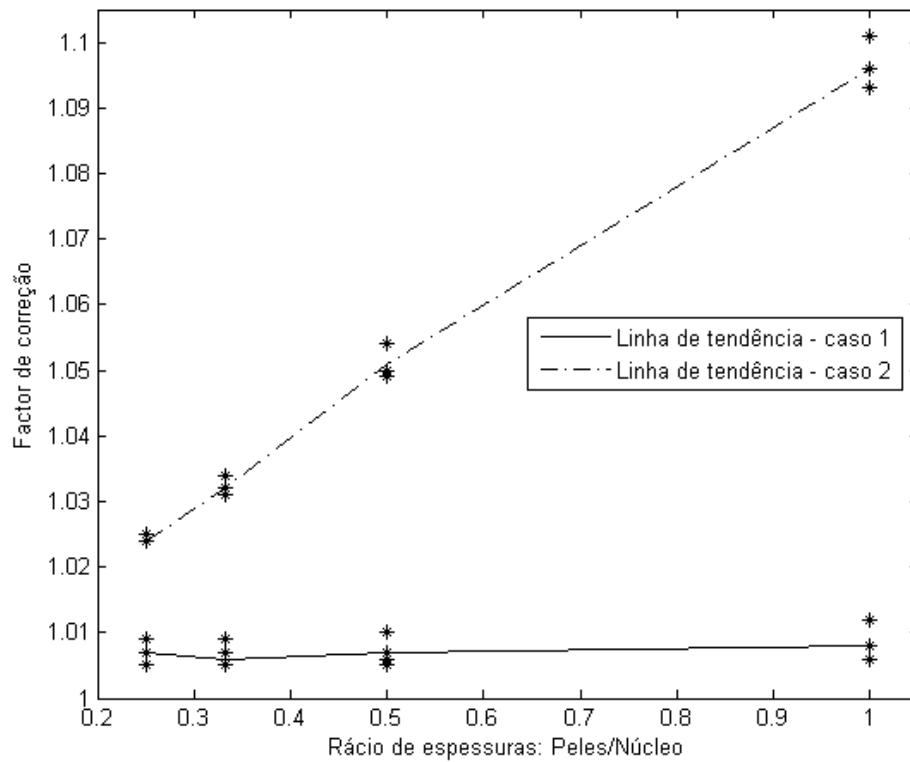


Figura 8.7: Factores de correcção propostos para diferentes rácios de espessuras entre as peles e o núcleo.

8.4 Conclusões finais

Nesta dissertação, teve-se como objectivo, propor um modelo que caracterizasse o comportamento de vigas de construção *sandwich*. A formulação consistiu na dedução de equações que permitissem obter factores da matriz de rigidez de elementos de viga, incorporando as propriedades dos materiais. Esta formulação baseou-se nos polinómios cúbicos hermitianos, e na relação entre curvatura e a deformação.

O modelo proposto, quando aplicado a vigas homogéneas, mostrou resultados muito satisfatórios. Os coeficientes da matriz de rigidez calculados por esta formulação analítica aproximam-se dos coeficientes obtidos numericamente por simulação com elementos finitos. Assim como na análise dinâmica, foi possível determinar com boa aproximação, as frequências naturais segundo as duas abordagens.

Relativamente ao caso de maior interesse, o estudo da viga *sandwich* mostrou resultados discordantes com os resultados numéricos. A grande diferença entre os módulos de rigidez entre o material do núcleo e o material das peles explica este comportamento, na medida em que, o núcleo de aglomerado de cortiça não possui rigidez ao corte suficiente para evitar a flexão excessiva. Além disto, existe o efeito de compressão radial das peles contra o núcleo por efeito da força de membrana nas referidas peles. Assim, também o momento de inércia equivalente se altera (diminui). Ao analisar as figuras 8.2 e 8.3, verifica-se a discrepância entre o valor dos coeficientes. Todavia, para núcleos com rigidez superior, este fenómeno desaparece e os resultados são mais animadores, mostrando uma boa concordância entre o modelo analítico e a modelo numérico. Deste modo, e tendo em conta o valor do módulo de Young equivalente determinado e ilustrado em 8.4, conclui-se que o modelo analítico proposto aproxima-se de uma viga com um núcleo mais rígido, enquanto que o modelo numérico baseado no Abaqus se aproxima do comportamento real de uma viga *sandwich* com núcleo de baixa rigidez.

Em síntese, a formulação desenvolvida apresenta bons resultados para estruturas homogéneas e estruturas *sandwich* onde o material do núcleo apresenta rigidez suficiente para suportar os esforços da estrutura. Para estruturas como a estudada, os resultados são insatisfatórios, pois, a teoria desenvolvida não modela as alterações de geometria da secção transversal, que perante desvios da deformada que assegura os factores de rigidez, origina um modelo com rigidez superior à real. Como consequência, foram propostos na tabela 8.6 factores de correcção para os coeficientes da matriz de rigidez da viga *sandwich*.

Outros factores para casos mais abrangentes, foram propostos em Fig. 8.6 e Fig. 8.7. A utilidade destes factores, incide na possibilidade de utilizar a formulação de elementos de viga ditos clássicos (introduzindo como momento de inércia o equivalente ao da viga *sandwich*, fazendo o mesmo para o módulo de Young equivalente) e corrigi-los para valores mais efectivos em função da relação geométrica entre as espessuras (pele/núcleo) e os módulos de Young.

8.5 Propostas futuras

Sugerem-se as seguintes propostas para trabalhos futuros:

- Determinação da rigidez mínima do núcleo de modo a que a viga se deforme de maneira esperada.
- Análise experimental, estática e dinâmica, de uma estrutura *sandwich* onde a diferença de rigidez entre os materiais não seja tão significativa.
- Contabilização da camada de adesivo nos modelos analítico e numérico.
- Comparação de resultados utilizando elementos de malha mais adequados, ao invés de apenas elementos cúbicos de oito nós.
- Determinação de factores de correcção para um grupo alargado de materiais e configurações de vigas *sandwich*.
- Desenvolver a formulação para outro tipo de configuração da estrutura, onde mais materiais possam ser utilizados em simultâneo.

Bibliografia

- [1] C.A. Felippa. A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. *Computers & Structures*, 79(14):1313 – 1324, 2001.
- [2] F. Teixeira-Dias, J. Pinho da Cruz, R.A. Fontes Valente, and R.J. Alves de Sousa. *Método dos Elementos Finitos: Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*. Lidel, 2010.
- [3] R.D. Cook. *Finite element modeling for stress analysis*. Wiley, 1995.
- [4] Hexcel Composites - Honeycomb Sandwich Design Technology [on-line]. 2000. Disponível em <http://www.hexcel.com/resources/technology-manuals>.
- [5] Kicki F. Karlsson and B. Tomas AStrom. Manufacturing and applications of structural sandwich components. *Composites Part A 28A*, 1997.
- [6] Pedro Miguel Grifo Belbute. *Estudo do Comportamento em Flexão de Vigas Compósitas Sandwich*. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, 2010.
- [7] DIAB. *Sandwich concept*. DIAB Sandwich Handbook.
- [8] J.M. Davies. *Lightweight Sandwich Construction*. Wiley, 2008.
- [9] RAF - De Havilland Mosquito [on-line]. Disponível em <http://www.raf.mod.uk/history/dehavillandmosquito.cfm>.
- [10] Lightweight solutions for railway and bus. [on-line]. 2014. Disponível em <http://www.amorimcorkcomposites.com/images/livraria/Transportation%20brochure.pdf>.
- [11] Inspiro - The new metro platform from Siemens [on-line]. 2013. Disponível em <http://www.mobility.siemens.com/mobility/global/SiteCollectionDocuments/en/rail-solutions/metros/inspiration-citylife-inspiro/inspiro-plattform-en.pdf>.
- [12] D.B. Miracle, ASM International. Handbook Committee, and S.L. Donaldson. *ASM Handbook*. Number vol. 21 in ASM handbook. ASM International, 2001.
- [13] Achilles Petras. *Design of sandwich structures*. PhD thesis, University of Cambridge, 1999.
- [14] Craig A. Steeves and Norman A. Fleck. Material selection in sandwich beam construction. *Scripta Materialia*, 50(10):1335 – 1339, 2004.

-
- [15] M.F. de S. F. de Moura, A.M.B. de Moraes, and A.G. de Magalhães. *Materiais compósitos: materiais, fabrico e comportamento mecânico*. Edições técnicas. Publindústria, 2005.
- [16] Luís Gil. In: *M Clara Gonçalves, Fernanda Margarido (eds), «Ciência e Engenharia de Materiais de Construção»*. cap. 13, p. 663-715. IST, 2012.
- [17] M. A. Sabino. E. M. Fernandes V. M. Correlo L. F. Boesel e R. L. Reis S. P. Silva. *Cork: properties, capabilities and applications*. 50:345-365. ASM International, 2005.
- [18] APCOR - Do sobreiro à cortiça - um sistema sustentável [on-line]. 2008. Disponível em <http://www.apcor.pt/artigo/publicacoes-APCOR.htm>.
- [19] Luís Gil. *Cortiça - Produção, Tecnologia e Aplicação*. Ed INETI, 1998.
- [20] M.A. Fortes, M.E. Rosa, and H. Pereira. *A cortiça*. Instituto Superior Técnico, 2004.
- [21] R.A.S. Moreira, F.J.Q. Melo, and J.F. Dias Rodrigues. Static and dynamic characterization of composition cork for sandwich beam cores. *Journal of Materials Science*, 45(12):3350–3366, 2010.
- [22] Leonard Meirovitch. *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill International Editions. McGraw-Hill Education, 2001.
- [23] Graham C. Archer and Timothy M. Whalen. Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(68):675–689, 2005.

Apêndice A

Códigos MatLab

A.1 Código para determinação dos coeficiente da matriz de rigidez da viga sandwich

```
1
2 %===== Dados =====
3
4 L = 420e-3;      % Comprimento
5 b = 40e-3;      % largura
6 h = 10e-3;      % altura total
7 esp = 1e-3;     % espessura alumínio
8 Ecork = 12.4e6;  % Módulo Young cortiça
9 Eal = 70e9;     % Módulo Young alumínio
10
11 % Inércia relativa ao alumínio
12 I1 = b*[-2/3*((-3*h^2/4)*esp+(3*h/2)*esp^2-esp^3)];
13
14 % Inércia relativa à cortiça
15 I2 = b*[+2/3*(h^3/8-(3*h^2/4)*esp+(3*h/2)*esp^2-esp^3)];
16
17 % EI equivalente
18 EI_eq = (Eal*I1+Ecork*I2);
19
20 %===== Funções para nó i =====
21 x=0;
22
23 % 2ª e 3ª derivada para o caso de deslocamento imposto
24 ddy_caso_1 = -6/L^2+12*L*x/L^3;
25 dddy_caso_1 = 12/L^3;
26
27 % 2ª e 3ª derivada para o caso de rotação imposta
28 ddy_caso_2 = -4/L+6*L*x/L^2;
29 dddy_caso_2 = 6/L^2;
30
31 % Coeficientes - deslocamento imposto
32 M_i_1 = EI_eq*ddy_caso_1;
33 F_i_1 = EI_eq*dddy_caso_1;
34
35 % Coeficientes - rotação imposta
```

```

36 M_i_2 = EI_eq*ddy_caso_2;
37 F_i_2 = EI_eq*ddy_caso_2;
38
39 %===== Funções para nó j =====
40 x = 1;
41
42 % 2ª e 3ª derivada para o caso de deslocamento imposto
43 ddy_caso_1 = -6/L^2+12*L*x/L^3;
44 dddy_caso_1 = 12/L^3;
45 % 2ª e 3ª derivada para o caso de rotação imposta
46 ddy_caso_2 = -4/L+6*L*x/L^2;
47 dddy_caso_2 = 6/L^2;
48
49 % Coeficientes - deslocamento imposto
50 M_j_1 = EI_eq*ddy_caso_1;
51 F_j_1 = EI_eq*ddy_caso_1;
52
53 % Coeficientes - rotação imposta
54 M_j_2 = EI_eq*ddy_caso_2;
55 F_j_2 = EI_eq*ddy_caso_2;
56
57 %===== Matriz de rigidez =====
58
59 K = [ F_i_1  F_i_2  -F_j_1  F_j_2
60       -M_i_1 -M_i_2 -M_j_1  M_j_2
61       -F_i_1 -F_i_2  F_j_1  -F_j_2
62       -M_i_1  M_j_2 -M_j_1 -M_i_2];

```

A.2 Código para determinação das frequências naturais

```

1
2
3 %Dados
4
5 nelementos = 10;           % n° de elementos
6 L = 0.420/nelementos;     % [m]      Comprimento de cada elemento
7 E = 70e9;                   % [Pa]      Módulo de Young
8 I = 3.3333e-9;              % [m^4]     Momento de inércia de área
9 p = 2710;                   % [kg/m^3]  Massa volumica
10 A = 40e-3*10e-3;           % [m^2]     Área de secção
11
12 c = E*I/L^3;                % constantes a multiplicar pela mat. de rigidez
13
14 nos=nelementos+1;          % n° de nós
15 dof=2*nos;                  % n° de graus de liberdade
16
17 % Matriz de rigidez
18 K = c* [12    6*L    -12    6*L
19         6*L    4*L^2  -6*L    2*L^2
20        -12   -6*L     12   -6*L
21         6*L    2*L^2  -6*L    4*L^2];
22
23 % Matriz de massa
24 M = p*A*[L/2    0    0    0

```



```

25         0      (L^3)/24      0      0
26         0      0      L/2      0
27         0      0      0      (L^3)/24];
28
29 %
30 K2 = zeros(dof);
31 M2=zeros(dof);
32
33 % Assemblagem das matrizes de rigidez e massa.
34 for i=1:dof
35     for j=1:dof
36         if i==j && mod(i,2)==1 && i<dof-2
37
38             K2(i:i+3,j:j+3)= K2(i:i+3,j:j+3)+K;
39             M2(i:i+3,j:j+3)= M2(i:i+3,j:j+3)+M;
40
41         end
42     end
43 end
44 K2;
45 M2;
46
47 % Eliminação das duas primeiras linhas e colunas (Encastramento).
48 K3=K2(3:end,3:end);
49 M3=M2(3:end,3:end);
50
51 % Cálculo das frequências naturais em Hz.
52 [V,D] = eig(K3,M3);
53 w_nat = sqrt(D);
54 freq = w_nat/(2*pi);
55
56 % Ordenação das frequências num vector.
57 Frequencias = zeros(dof,1);
58 for i=1:dof-2
59     for j=1:dof-2
60         if i==j
61             Frequencias(i) = freq(i,j);
62         end
63     end
64 end
65
66 Frequencias

```


Apêndice B

Determinação dos coeficientes da viga *sandwich* alumínio - aglomerado de cortiça

Figura B.1: Determinação do coeficiente K13.

Para todos os pontos X = 0 mm; F - Força de reacção na direcção vertical em cada nó [N]														
Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F
50	9	1,8345	42	8	-2,6658	34	0	-2,6382	26	-1	2,9042	18	6	0,0113
48	9	3,5465	40	8	-2,6507	32	0	-2,6375	24	-1	2,9106	16	6	0,0110
46	9	3,1967	38	8	-2,6432	30	0	-2,6374	22	-1	2,9218	14	6	0,0105
44	9	3,0469	36	8	-2,6398	28	0	-2,6375	20	-1	2,9420	12	6	0,0095
42	9	2,9759	34	8	-2,6382	26	0	-2,6382	18	-1	2,9759	10	6	0,0044
40	9	2,9420	32	8	-2,6375	24	0	-2,6398	16	-1	3,0469	50	4	0,0055
38	9	2,9218	30	8	-2,6374	22	0	-2,6432	14	-1	3,1967	48	4	0,0116
36	9	2,9106	28	8	-2,6375	20	0	-2,6507	12	-1	3,5465	46	4	0,0125
34	9	2,9042	26	8	-2,6382	18	0	-2,6658	10	-1	1,8345	44	4	0,0132
32	9	2,9009	24	8	-2,6398	16	0	-2,7040	50	6	0,0044	42	4	0,0136
30	9	2,8999	22	8	-2,6432	14	0	-2,7453	48	6	0,0095	40	4	0,0139
28	9	2,9009	20	8	-2,6507	12	0	-3,3085	46	6	0,0105	38	4	0,0140
26	9	2,9042	18	8	-2,6658	10	0	-2,3559	44	6	0,0110	36	4	0,0141
24	9	2,9106	16	8	-2,7040	50	-1	1,8345	42	6	0,0113	34	4	0,0141
22	9	2,9218	14	8	-2,7453	48	-1	3,5465	40	6	0,0115	32	4	0,0141
20	9	2,9420	12	8	-3,3085	46	-1	3,1967	38	6	0,0116	30	4	0,0141
18	9	2,9759	10	8	-2,3559	44	-1	3,0469	36	6	0,0117	28	4	0,0141
16	9	3,0469	50	0	-2,3559	42	-1	2,9759	34	6	0,0117	26	4	0,0141
14	9	3,1967	48	0	-3,3085	40	-1	2,9420	32	6	0,0117	24	4	0,0141
12	9	3,5465	46	0	-2,7453	38	-1	2,9218	30	6	0,0117	22	4	0,0140
10	9	1,8345	44	0	-2,7040	36	-1	2,9106	28	6	0,0117	20	4	0,0139
50	8	-2,3559	42	0	-2,6658	34	-1	2,9042	26	6	0,0117	18	4	0,0136
48	8	-3,3085	40	0	-2,6507	32	-1	2,9009	24	6	0,0117	16	4	0,0132
46	8	-2,7453	38	0	-2,6432	30	-1	2,8999	22	6	0,0116	14	4	0,0125
44	8	-2,7040	36	0	-2,6398	28	-1	2,9009	20	6	0,0115	12	4	0,0116
													Força total	10,0000
u [mm]		-2,0981			K13 = F/u			-4766,214						

Figura B.2: Determinação do coeficiente K23.

Para todos os pontos X = 0 mm; d - distância ao eixo de rotação [m]; F - Força de reacção na direcção axial [N]; M - contribuição para o momento de cada nó [N.m]									
Z	Y	d	F	M	Z	Y	d	F	M
50	9	0,005	-5,3072E+00	2,6536E-02	46	-1	0,005	9,1557E+00	4,5779E-02
48	9	0,005	-9,1745E+00	4,5872E-02	44	-1	0,005	9,1205E+00	4,5603E-02
46	9	0,005	-9,1557E+00	4,5779E-02	42	-1	0,005	9,0839E+00	4,5419E-02
44	9	0,005	-9,1205E+00	4,5603E-02	40	-1	0,005	9,0674E+00	4,5337E-02
42	9	0,005	-9,0839E+00	4,5419E-02	38	-1	0,005	9,0546E+00	4,5273E-02
40	9	0,005	-9,0674E+00	4,5337E-02	36	-1	0,005	9,0467E+00	4,5233E-02
38	9	0,005	-9,0546E+00	4,5273E-02	34	-1	0,005	9,0416E+00	4,5208E-02
36	9	0,005	-9,0467E+00	4,5233E-02	32	-1	0,005	9,0389E+00	4,5194E-02
34	9	0,005	-9,0416E+00	4,5208E-02	30	-1	0,005	9,0380E+00	4,5190E-02
32	9	0,005	-9,0389E+00	4,5194E-02	28	-1	0,005	9,0389E+00	4,5194E-02
30	9	0,005	-9,0380E+00	4,5190E-02	26	-1	0,005	9,0416E+00	4,5208E-02
28	9	0,005	-9,0389E+00	4,5194E-02	24	-1	0,005	9,0467E+00	4,5233E-02
26	9	0,005	-9,0416E+00	4,5208E-02	22	-1	0,005	9,0546E+00	4,5273E-02
24	9	0,005	-9,0467E+00	4,5233E-02	20	-1	0,005	9,0674E+00	4,5337E-02
22	9	0,005	-9,0546E+00	4,5273E-02	18	-1	0,005	9,0839E+00	4,5419E-02
20	9	0,005	-9,0674E+00	4,5337E-02	16	-1	0,005	9,1205E+00	4,5603E-02
18	9	0,005	-9,0839E+00	4,5419E-02	14	-1	0,005	9,1557E+00	4,5779E-02
16	9	0,005	-9,1205E+00	4,5603E-02	12	-1	0,005	9,1745E+00	4,5872E-02
14	9	0,005	-9,1557E+00	4,5779E-02	10	-1	0,005	5,3072E+00	2,6536E-02
12	9	0,005	-9,1745E+00	4,5872E-02	50	6	0,002	-1,3330E-03	2,6659E-06
10	9	0,005	-5,3072E+00	2,6536E-02	48	6	0,002	-1,9594E-03	3,9189E-06
50	8	0,004	-3,4828E+00	1,3931E-02	46	6	0,002	-1,3702E-03	2,7403E-06
48	8	0,004	-3,0542E+00	1,2217E-02	44	6	0,002	-1,1730E-03	2,3460E-06
46	8	0,004	-1,6438E+00	6,5752E-03	42	6	0,002	-1,1254E-03	2,2508E-06
44	8	0,004	-1,3652E+00	5,4608E-03	40	6	0,002	-1,1227E-03	2,2455E-06
42	8	0,004	-1,2239E+00	4,8955E-03	38	6	0,002	-1,1299E-03	2,2597E-06
40	8	0,004	-1,1614E+00	4,6454E-03	36	6	0,002	-1,1372E-03	2,2745E-06
38	8	0,004	-1,1307E+00	4,5226E-03	34	6	0,002	-1,1426E-03	2,2853E-06
36	8	0,004	-1,1164E+00	4,4655E-03	32	6	0,002	-1,1458E-03	2,2916E-06
34	8	0,004	-1,1097E+00	4,4389E-03	30	6	0,002	-1,1468E-03	2,2937E-06
32	8	0,004	-1,1070E+00	4,4280E-03	28	6	0,002	-1,1458E-03	2,2916E-06
30	8	0,004	-1,1063E+00	4,4250E-03	26	6	0,002	-1,1426E-03	2,2853E-06
28	8	0,004	-1,1070E+00	4,4280E-03	24	6	0,002	-1,1372E-03	2,2745E-06
26	8	0,004	-1,1097E+00	4,4389E-03	22	6	0,002	-1,1299E-03	2,2597E-06
24	8	0,004	-1,1164E+00	4,4655E-03	20	6	0,002	-1,1227E-03	2,2455E-06
22	8	0,004	-1,1307E+00	4,5226E-03	18	6	0,002	-1,1254E-03	2,2508E-06
20	8	0,004	-1,1614E+00	4,6454E-03	16	6	0,002	-1,1730E-03	2,3460E-06
18	8	0,004	-1,2239E+00	4,8955E-03	14	6	0,002	-1,3702E-03	2,7403E-06
16	8	0,004	-1,3652E+00	5,4608E-03	12	6	0,002	-1,9594E-03	3,9189E-06
14	8	0,004	-1,6438E+00	6,5752E-03	10	6	0,002	-1,3330E-03	2,6659E-06
12	8	0,004	-3,0542E+00	1,2217E-02	50	2	0,002	1,3330E-03	2,6659E-06
10	8	0,004	-3,4828E+00	1,3931E-02	48	2	0,002	1,9594E-03	3,9189E-06
50	0	0,004	3,4828E+00	1,3931E-02	46	2	0,002	1,3702E-03	2,7403E-06
48	0	0,004	3,0542E+00	1,2217E-02	44	2	0,002	1,1730E-03	2,3460E-06
46	0	0,004	1,6438E+00	6,5752E-03	42	2	0,002	1,1254E-03	2,2508E-06
44	0	0,004	1,3652E+00	5,4608E-03	40	2	0,002	1,1227E-03	2,2455E-06
42	0	0,004	1,2239E+00	4,8955E-03	38	2	0,002	1,1299E-03	2,2597E-06
40	0	0,004	1,1614E+00	4,6454E-03	36	2	0,002	1,1372E-03	2,2745E-06
38	0	0,004	1,1307E+00	4,5226E-03	34	2	0,002	1,1426E-03	2,2853E-06
36	0	0,004	1,1164E+00	4,4655E-03	32	2	0,002	1,1458E-03	2,2916E-06
34	0	0,004	1,1097E+00	4,4389E-03	30	2	0,002	1,1468E-03	2,2937E-06
32	0	0,004	1,1070E+00	4,4280E-03	28	2	0,002	1,1458E-03	2,2916E-06
30	0	0,004	1,1063E+00	4,4250E-03	26	2	0,002	1,1426E-03	2,2853E-06
28	0	0,004	1,1070E+00	4,4280E-03	24	2	0,002	1,1372E-03	2,2745E-06
26	0	0,004	1,1097E+00	4,4389E-03	22	2	0,002	1,1299E-03	2,2597E-06
24	0	0,004	1,1164E+00	4,4655E-03	20	2	0,002	1,1227E-03	2,2455E-06
22	0	0,004	1,1307E+00	4,5226E-03	18	2	0,002	1,1254E-03	2,2508E-06
20	0	0,004	1,1614E+00	4,6454E-03	16	2	0,002	1,1730E-03	2,3460E-06
18	0	0,004	1,2239E+00	4,8955E-03	14	2	0,002	1,3702E-03	2,7403E-06
16	0	0,004	1,3652E+00	5,4608E-03	12	2	0,002	1,9594E-03	3,9189E-06
14	0	0,004	1,6438E+00	6,5752E-03	10	2	0,002	1,3330E-03	2,6659E-06
12	0	0,004	3,0542E+00	1,2217E-02			Momento total		2,1035
10	0	0,004	3,4828E+00	1,3931E-02			u [mm]		-2,0981
50	-1	0,005	5,3072E+00	2,6536E-02			K44 = M/θ		-1002,561
48	-1	0,005	9,1745E+00	4,5872E-02					

Figura B.3: Determinação do coeficiente K43.

Para todos os pontos X = 420 mm; d - distância ao eixo de rotação [m]; F - Força de reacção na direcção axial [N]; M - contribuição para o momento de cada nó [N.m]									
Z	Y	d	F	M	Z	Y	d	F	M
10	9	0,005	-4,4332E+00	2,2166E-02	14	-1	0,005	8,8206E+00	4,4103E-02
12	9	0,005	-8,8228E+00	4,4114E-02	16	-1	0,005	8,8335E+00	4,4167E-02
14	9	0,005	-8,8206E+00	4,4103E-02	18	-1	0,005	8,8463E+00	4,4232E-02
16	9	0,005	-8,8335E+00	4,4167E-02	20	-1	0,005	8,8585E+00	4,4293E-02
18	9	0,005	-8,8463E+00	4,4232E-02	22	-1	0,005	8,8688E+00	4,4344E-02
20	9	0,005	-8,8585E+00	4,4293E-02	24	-1	0,005	8,8769E+00	4,4385E-02
22	9	0,005	-8,8688E+00	4,4344E-02	26	-1	0,005	8,8828E+00	4,4414E-02
24	9	0,005	-8,8769E+00	4,4385E-02	28	-1	0,005	8,8863E+00	4,4431E-02
26	9	0,005	-8,8828E+00	4,4414E-02	30	-1	0,005	8,8874E+00	4,4437E-02
28	9	0,005	-8,8863E+00	4,4431E-02	32	-1	0,005	8,8863E+00	4,4431E-02
30	9	0,005	-8,8874E+00	4,4437E-02	34	-1	0,005	8,8828E+00	4,4414E-02
32	9	0,005	-8,8863E+00	4,4431E-02	36	-1	0,005	8,8769E+00	4,4385E-02
34	9	0,005	-8,8828E+00	4,4414E-02	38	-1	0,005	8,8688E+00	4,4344E-02
36	9	0,005	-8,8769E+00	4,4385E-02	40	-1	0,005	8,8585E+00	4,4293E-02
38	9	0,005	-8,8688E+00	4,4344E-02	42	-1	0,005	8,8463E+00	4,4232E-02
40	9	0,005	-8,8585E+00	4,4293E-02	44	-1	0,005	8,8335E+00	4,4167E-02
42	9	0,005	-8,8463E+00	4,4232E-02	46	-1	0,005	8,8206E+00	4,4103E-02
44	9	0,005	-8,8335E+00	4,4167E-02	48	-1	0,005	8,8228E+00	4,4114E-02
46	9	0,005	-8,8206E+00	4,4103E-02	50	-1	0,005	4,4332E+00	2,2166E-02
48	9	0,005	-8,8228E+00	4,4114E-02	10	6	0,002	-1,1380E-02	2,2761E-05
50	9	0,005	-4,4332E+00	2,2166E-02	12	6	0,002	-2,2779E-02	4,5558E-05
10	8	0,004	-9,6563E-01	3,8625E-03	14	6	0,002	-2,2859E-02	4,5717E-05
12	8	0,004	-1,9917E+00	7,9667E-03	16	6	0,002	-2,2921E-02	4,5841E-05
14	8	0,004	-2,0198E+00	8,0793E-03	18	6	0,002	-2,2956E-02	4,5912E-05
16	8	0,004	-2,0275E+00	8,1099E-03	20	6	0,002	-2,2977E-02	4,5954E-05
18	8	0,004	-2,0308E+00	8,1232E-03	22	6	0,002	-2,2991E-02	4,5981E-05
20	8	0,004	-2,0314E+00	8,1256E-03	24	6	0,002	-2,3000E-02	4,5999E-05
22	8	0,004	-2,0310E+00	8,1241E-03	26	6	0,002	-2,3005E-02	4,6011E-05
24	8	0,004	-2,0303E+00	8,1214E-03	28	6	0,002	-2,3009E-02	4,6017E-05
26	8	0,004	-2,0297E+00	8,1187E-03	30	6	0,002	-2,3010E-02	4,6019E-05
28	8	0,004	-2,0292E+00	8,1168E-03	32	6	0,002	-2,3009E-02	4,6017E-05
30	8	0,004	-2,0291E+00	8,1162E-03	34	6	0,002	-2,3005E-02	4,6011E-05
32	8	0,004	-2,0292E+00	8,1168E-03	36	6	0,002	-2,3000E-02	4,5999E-05
34	8	0,004	-2,0297E+00	8,1187E-03	38	6	0,002	-2,2991E-02	4,5981E-05
36	8	0,004	-2,0303E+00	8,1214E-03	40	6	0,002	-2,2977E-02	4,5954E-05
38	8	0,004	-2,0310E+00	8,1241E-03	42	6	0,002	-2,2956E-02	4,5912E-05
40	8	0,004	-2,0314E+00	8,1256E-03	44	6	0,002	-2,2921E-02	4,5841E-05
42	8	0,004	-2,0308E+00	8,1232E-03	46	6	0,002	-2,2859E-02	4,5717E-05
44	8	0,004	-2,0275E+00	8,1099E-03	48	6	0,002	-2,2779E-02	4,5558E-05
46	8	0,004	-2,0198E+00	8,0793E-03	50	6	0,002	-1,1380E-02	2,2761E-05
48	8	0,004	-1,9917E+00	7,9667E-03	10	2	0,002	1,1380E-02	2,2761E-05
50	8	0,004	-9,6563E-01	3,8625E-03	12	2	0,002	2,2779E-02	4,5558E-05
10	0	0,004	9,6563E-01	3,8625E-03	14	2	0,002	2,2859E-02	4,5717E-05
12	0	0,004	1,9917E+00	7,9667E-03	16	2	0,002	2,2921E-02	4,5841E-05
14	0	0,004	2,0198E+00	8,0793E-03	18	2	0,002	2,2956E-02	4,5912E-05
16	0	0,004	2,0275E+00	8,1099E-03	20	2	0,002	2,2977E-02	4,5954E-05
18	0	0,004	2,0308E+00	8,1232E-03	22	2	0,002	2,2991E-02	4,5981E-05
20	0	0,004	2,0314E+00	8,1256E-03	24	2	0,002	2,3000E-02	4,5999E-05
22	0	0,004	2,0310E+00	8,1241E-03	26	2	0,002	2,3005E-02	4,6011E-05
24	0	0,004	2,0303E+00	8,1214E-03	28	2	0,002	2,3009E-02	4,6017E-05
26	0	0,004	2,0297E+00	8,1187E-03	30	2	0,002	2,3009E-02	4,6017E-05
28	0	0,004	2,0292E+00	8,1168E-03	32	2	0,002	2,3010E-02	4,6019E-05
30	0	0,004	2,0291E+00	8,1162E-03	34	2	0,002	2,3005E-02	4,6011E-05
32	0	0,004	2,0292E+00	8,1168E-03	36	2	0,002	2,3000E-02	4,5999E-05
34	0	0,004	2,0297E+00	8,1187E-03	38	2	0,002	2,2991E-02	4,5981E-05
36	0	0,004	2,0303E+00	8,1214E-03	40	2	0,002	2,2977E-02	4,5954E-05
38	0	0,004	2,0310E+00	8,1241E-03	42	2	0,002	2,2956E-02	4,5912E-05
40	0	0,004	2,0314E+00	8,1256E-03	44	2	0,002	2,2921E-02	4,5841E-05
42	0	0,004	2,0308E+00	8,1232E-03	46	2	0,002	2,2859E-02	4,5717E-05
44	0	0,004	2,0275E+00	8,1099E-03	48	2	0,002	2,2779E-02	4,5558E-05
46	0	0,004	2,0198E+00	8,0793E-03	50	2	0,002	1,1380E-02	2,2761E-05
48	0	0,004	1,9917E+00	7,9667E-03	Momento total		2,0965		
50	0	0,004	9,6563E-01	3,8625E-03	u [mm]		-2,0981		
10	-1	0,005	4,4332E+00	2,2166E-02	K44 = M/θ		-999,250		
12	-1	0,005	8,8228E+00	4,4114E-02					

Figura B.4: Determinação do coeficiente K14.

Para todos os pontos X = 0 mm; F - Força de reacção na direcção vertical [N]														
Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F
50	9	20,7260	42	8	-24,4671	34	0	-23,3468	26	-1	18,2657	18	6	-0,2300
48	9	23,8868	40	8	-23,9839	32	0	-23,2796	24	-1	18,2933	16	6	-0,2260
46	9	18,5037	38	8	-23,6673	30	0	-23,2582	22	-1	18,3348	14	6	-0,2189
44	9	18,7153	36	8	-23,4696	28	0	-23,2796	20	-1	18,3973	12	6	-0,2081
42	9	18,4997	34	8	-23,3468	26	0	-23,3468	18	-1	18,4997	10	6	-0,1018
40	9	18,3973	32	8	-23,2796	24	0	-23,4696	16	-1	18,7153	50	4	-0,1267
38	9	18,3348	30	8	-23,2582	22	0	-23,6673	14	-1	18,5037	48	4	-0,2519
36	9	18,2933	28	8	-23,2796	20	0	-23,9839	12	-1	23,8868	46	4	-0,2601
34	9	18,2657	26	8	-23,3468	18	0	-24,4671	10	-1	20,7260	44	4	-0,2694
32	9	18,2502	24	8	-23,4696	16	0	-25,3450	50	6	-0,1018	42	4	-0,2747
30	9	18,2452	22	8	-23,6673	14	0	-27,3264	48	6	-0,2081	40	4	-0,2774
28	9	18,2502	20	8	-23,9839	12	0	-29,2926	46	6	-0,2189	38	4	-0,2787
26	9	18,2657	18	8	-24,4671	10	0	-11,8222	44	6	-0,2260	36	4	-0,2792
24	9	18,2933	16	8	-25,3450	50	-1	20,7260	42	6	-0,2300	34	4	-0,2794
22	9	18,3348	14	8	-27,3264	48	-1	23,8868	40	6	-0,2321	32	4	-0,2795
20	9	18,3973	12	8	-29,2926	46	-1	18,5037	38	6	-0,2330	30	4	-0,2795
18	9	18,4997	10	8	-11,8222	44	-1	18,7153	36	6	-0,2333	28	4	-0,2795
16	9	18,7153	50	0	-11,8222	42	-1	18,4997	34	6	-0,2334	26	4	-0,2794
14	9	18,5037	48	0	-29,2926	40	-1	18,3973	32	6	-0,2334	24	4	-0,2792
12	9	23,8868	46	0	-27,3264	38	-1	18,3348	30	6	-0,2334	22	4	-0,2787
10	9	20,7260	44	0	-25,3450	36	-1	18,2933	28	6	-0,2334	20	4	-0,2774
50	8	-11,8222	42	0	-24,4671	34	-1	18,2657	26	6	-0,2334	18	4	-0,2747
48	8	-29,2926	40	0	-23,9839	32	-1	18,2502	24	6	-0,2330	16	4	-0,2694
46	8	-27,3264	38	0	-23,6673	30	-1	18,2452	22	6	-0,2330	14	4	-0,2601
44	8	-25,3450	36	0	-23,4696	28	-1	18,2502	20	6	-0,2321	12	4	-0,2519
													Força total	-201,0373
θ [rad]		0,19739556		K14 = F/ θ										-1018,449

Figura B.5: Determinação do coeficiente K34.

Para todos os pontos X = 420 mm; F - Força de reacção na direcção vertical [N]														
Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F	Z	Y	F
10	9	38,4215	18	8	-102,4040	26	0	-103,5150	34	-1	109,2330	42	6	0,2347
12	9	106,0630	20	8	-102,8380	28	0	-103,5890	36	-1	109,2030	44	6	0,2257
14	9	108,9570	22	8	-103,1770	30	0	-103,6130	38	-1	109,1590	46	6	0,2085
16	9	109,1810	24	8	-103,3820	32	0	-103,5890	40	-1	109,1330	48	6	0,1658
18	9	109,0190	26	8	-103,5150	34	0	-103,5150	42	-1	109,0190	50	6	0,0069
20	9	109,1330	28	8	-103,5890	36	0	-103,3820	44	-1	109,1810	10	4	0,0243
22	9	109,1590	30	8	-103,6130	38	0	-103,1770	46	-1	108,9570	12	4	0,1962
24	9	109,2030	32	8	-103,5890	40	0	-102,8380	48	-1	106,0630	14	4	0,2496
26	9	109,2330	34	8	-103,5150	42	0	-102,4040	50	-1	38,4215	16	4	0,2715
28	9	109,2520	36	8	-103,3820	44	0	-101,3490	10	6	0,0069	18	4	0,2830
30	9	109,2580	38	8	-103,1770	46	0	-99,7726	12	6	0,1658	20	4	0,2895
32	9	109,2520	40	8	-102,8380	48	0	-95,5641	14	6	0,2085	22	4	0,2934
34	9	109,2330	42	8	-102,4040	50	0	-58,1040	16	6	0,2257	24	4	0,2957
36	9	109,2030	44	8	-101,3490	10	-1	38,4215	18	6	0,2347	26	4	0,2970
38	9	109,1590	46	8	-99,7726	12	-1	106,0630	20	6	0,2398	28	4	0,2977
40	9	109,1330	48	8	-95,5641	14	-1	108,9570	22	6	0,2429	30	4	0,2980
42	9	109,0190	50	8	-58,1040	16	-1	109,1810	24	6	0,2447	32	4	0,2977
44	9	109,1810	10	0	-58,1040	18	-1	109,0190	26	6	0,2457	34	4	0,2970
46	9	108,9570	12	0	-95,5641	20	-1	109,1330	28	6	0,2463	36	4	0,2957
48	9	106,0630	14	0	-99,7726	22	-1	109,1590	30	6	0,2465	38	4	0,2934
50	9	38,4215	16	0	-101,3490	24	-1	109,2030	32	6	0,2463	40	4	0,2895
10	8	-58,1040	18	0	-102,4040	26	-1	109,2330	34	6	0,2457	42	4	0,2830
12	8	-95,5641	20	0	-102,8380	28	-1	109,2520	36	6	0,2447	44	4	0,2715
14	8	-99,7726	22	0	-103,1770	30	-1	109,2580	38	6	0,2429	46	4	0,2496
16	8	-101,3490	24	0	-103,3820	32	-1	109,2520	40	6	0,2398	48	4	0,1962
													Força total	201,0283
θ [rad]		0,19739556		K34 = F/ θ										1018,404

Figura B.6: Determinação do coeficiente K24.

Para todos os pontos X = 0 mm; d - distância ao eixo de rotação [m]; F - Força de reação na direção axial [N]; M - contribuição para o momento de cada nó [N.m]									
Z	Y	d	F	M	Z	Y	d	F	M
48	9	0,005	1,1965E+01	5,9824E-02	44	-1	0,005	-3,2380E+01	1,6190E-01
46	9	0,005	2,9445E+01	1,4723E-01	42	-1	0,005	-3,3742E+01	1,6871E-01
44	9	0,005	3,2380E+01	1,6190E-01	40	-1	0,005	-3,4291E+01	1,7145E-01
42	9	0,005	3,3742E+01	1,6871E-01	38	-1	0,005	-3,4507E+01	1,7254E-01
40	9	0,005	3,4291E+01	1,7145E-01	36	-1	0,005	-3,4577E+01	1,7289E-01
38	9	0,005	3,4507E+01	1,7254E-01	34	-1	0,005	-3,4591E+01	1,7296E-01
36	9	0,005	3,4577E+01	1,7289E-01	32	-1	0,005	-3,4588E+01	1,7294E-01
34	9	0,005	3,4591E+01	1,7296E-01	30	-1	0,005	-3,4585E+01	1,7292E-01
32	9	0,005	3,4588E+01	1,7294E-01	28	-1	0,005	-3,4588E+01	1,7294E-01
30	9	0,005	3,4585E+01	1,7292E-01	26	-1	0,005	-3,4591E+01	1,7296E-01
28	9	0,005	3,4588E+01	1,7294E-01	24	-1	0,005	-3,4577E+01	1,7289E-01
26	9	0,005	3,4591E+01	1,7296E-01	22	-1	0,005	-3,4507E+01	1,7254E-01
24	9	0,005	3,4577E+01	1,7289E-01	20	-1	0,005	-3,4291E+01	1,7145E-01
22	9	0,005	3,4507E+01	1,7254E-01	18	-1	0,005	-3,3742E+01	1,6871E-01
20	9	0,005	3,4291E+01	1,7145E-01	16	-1	0,005	-3,2380E+01	1,6190E-01
18	9	0,005	3,3742E+01	1,6871E-01	14	-1	0,005	-2,9445E+01	1,4723E-01
16	9	0,005	3,2380E+01	1,6190E-01	12	-1	0,005	-1,1965E+01	5,9824E-02
14	9	0,005	2,9445E+01	1,4723E-01	10	-1	0,005	1,5379E+01	7,6895E-02
12	9	0,005	1,1965E+01	5,9824E-02	50	6	0,002	-9,3153E-03	1,8631E-05
10	9	0,005	-1,5379E+01	7,6895E-02	48	6	0,002	-1,0743E-02	2,1487E-05
50	8	0,004	-5,2710E+01	2,1084E-01	46	6	0,002	-1,4382E-02	2,8765E-05
48	8	0,004	-1,0660E+02	4,2640E-01	44	6	0,002	-1,6469E-02	3,2937E-05
46	8	0,004	-1,1250E+02	4,5000E-01	42	6	0,002	-1,6530E-02	3,3060E-05
44	8	0,004	-1,1247E+02	4,4990E-01	40	6	0,002	-1,6121E-02	3,2242E-05
42	8	0,004	-1,1200E+02	4,4801E-01	38	6	0,002	-1,5707E-02	3,1414E-05
40	8	0,004	-1,1156E+02	4,4624E-01	36	6	0,002	-1,5400E-02	3,0801E-05
38	8	0,004	-1,1114E+02	4,4454E-01	34	6	0,002	-1,5200E-02	3,0400E-05
36	8	0,004	-1,1080E+02	4,4321E-01	32	6	0,002	-1,5089E-02	3,0177E-05
34	8	0,004	-1,1056E+02	4,4225E-01	30	6	0,002	-1,5053E-02	3,0106E-05
32	8	0,004	-1,1042E+02	4,4168E-01	28	6	0,002	-1,5089E-02	3,0177E-05
30	8	0,004	-1,1037E+02	4,4149E-01	26	6	0,002	-1,5200E-02	3,0400E-05
28	8	0,004	-1,1042E+02	4,4168E-01	24	6	0,002	-1,5400E-02	3,0801E-05
26	8	0,004	-1,1056E+02	4,4225E-01	22	6	0,002	-1,5707E-02	3,1414E-05
24	8	0,004	-1,1080E+02	4,4321E-01	20	6	0,002	-1,6121E-02	3,2242E-05
22	8	0,004	-1,1114E+02	4,4454E-01	18	6	0,002	-1,6530E-02	3,3060E-05
20	8	0,004	-1,1156E+02	4,4624E-01	16	6	0,002	-1,6469E-02	3,2937E-05
18	8	0,004	-1,1200E+02	4,4801E-01	14	6	0,002	-1,4382E-02	2,8765E-05
16	8	0,004	-1,1247E+02	4,4990E-01	12	6	0,002	-1,0743E-02	2,1487E-05
14	8	0,004	-1,1250E+02	4,5000E-01	10	6	0,002	-9,3153E-03	1,8631E-05
12	8	0,004	-1,0660E+02	4,2640E-01	50	2	0,002	9,3153E-03	1,8631E-05
10	8	0,004	-5,2710E+01	2,1084E-01	48	2	0,002	1,0743E-02	2,1487E-05
50	0	0,004	5,2710E+01	2,1084E-01	46	2	0,002	1,4382E-02	2,8765E-05
48	0	0,004	1,0660E+02	4,2640E-01	44	2	0,002	1,6469E-02	3,2937E-05
46	0	0,004	1,1250E+02	4,5000E-01	42	2	0,002	1,6530E-02	3,3060E-05
44	0	0,004	1,1247E+02	4,4990E-01	40	2	0,002	1,6121E-02	3,2242E-05
42	0	0,004	1,1200E+02	4,4801E-01	38	2	0,002	1,5707E-02	3,1414E-05
40	0	0,004	1,1156E+02	4,4624E-01	36	2	0,002	1,5400E-02	3,0801E-05
38	0	0,004	1,1114E+02	4,4454E-01	34	2	0,002	1,5200E-02	3,0400E-05
36	0	0,004	1,1080E+02	4,4321E-01	32	2	0,002	1,5089E-02	3,0177E-05
34	0	0,004	1,1056E+02	4,4225E-01	30	2	0,002	1,5053E-02	3,0106E-05
32	0	0,004	1,1042E+02	4,4168E-01	28	2	0,002	1,5089E-02	3,0177E-05
30	0	0,004	1,1037E+02	4,4149E-01	26	2	0,002	1,5200E-02	3,0400E-05
28	0	0,004	1,1042E+02	4,4168E-01	24	2	0,002	1,5400E-02	3,0801E-05
26	0	0,004	1,1056E+02	4,4225E-01	22	2	0,002	1,5707E-02	3,1414E-05
24	0	0,004	1,1080E+02	4,4321E-01	20	2	0,002	1,6121E-02	3,2242E-05
22	0	0,004	1,1114E+02	4,4454E-01	18	2	0,002	1,6530E-02	3,3060E-05
20	0	0,004	1,1156E+02	4,4624E-01	16	2	0,002	1,6469E-02	3,2937E-05
18	0	0,004	1,1200E+02	4,4801E-01	14	2	0,002	1,4382E-02	2,8765E-05
16	0	0,004	1,1247E+02	4,4990E-01	12	2	0,002	1,0743E-02	2,1487E-05
14	0	0,004	1,1250E+02	4,5000E-01	10	2	0,002	9,3153E-03	1,8631E-05
12	0	0,004	1,0660E+02	4,2640E-01			Momento total		23,7275
10	0	0,004	5,2710E+01	2,1084E-01					
50	-1	0,005	1,5379E+01	7,6895E-02			Θ [rad]		0,19739556
48	-1	0,005	-1,1965E+01	5,9824E-02			K24 = M/Θ		121,342

Figura B.7: Determinação do coeficiente K44.

Para todos os pontos X = 420 mm; d - distância ao eixo de rotação [m]; F - Força de reação na direção axial [N]; M - contribuição para o momento de cada nó [N.m]										
Z	Y	d	F	M	Z	Y	d	F	M	
10	9	0,005	1,4061E+02	7,0303E-01	14	-1	0,005	-3,3989E+02	1,6994E+00	
12	9	0,005	3,2234E+02	1,6117E+00	16	-1	0,005	-3,4329E+02	1,7164E+00	
14	9	0,005	3,3989E+02	1,6994E+00	18	-1	0,005	-3,4517E+02	1,7258E+00	
16	9	0,005	3,4329E+02	1,7164E+00	20	-1	0,005	-3,4621E+02	1,7310E+00	
18	9	0,005	3,4517E+02	1,7258E+00	22	-1	0,005	-3,4681E+02	1,7341E+00	
20	9	0,005	3,4621E+02	1,7310E+00	24	-1	0,005	-3,4718E+02	1,7359E+00	
22	9	0,005	3,4681E+02	1,7341E+00	26	-1	0,005	-3,4740E+02	1,7370E+00	
24	9	0,005	3,4718E+02	1,7359E+00	28	-1	0,005	-3,4752E+02	1,7376E+00	
26	9	0,005	3,4740E+02	1,7370E+00	30	-1	0,005	-3,4755E+02	1,7378E+00	
28	9	0,005	3,4752E+02	1,7376E+00	32	-1	0,005	-3,4752E+02	1,7376E+00	
30	9	0,005	3,4755E+02	1,7378E+00	34	-1	0,005	-3,4740E+02	1,7370E+00	
32	9	0,005	3,4752E+02	1,7376E+00	36	-1	0,005	-3,4718E+02	1,7359E+00	
34	9	0,005	3,4740E+02	1,7370E+00	38	-1	0,005	-3,4681E+02	1,7341E+00	
36	9	0,005	3,4718E+02	1,7359E+00	40	-1	0,005	-3,4621E+02	1,7310E+00	
38	9	0,005	3,4681E+02	1,7341E+00	42	-1	0,005	-3,4517E+02	1,7258E+00	
40	9	0,005	3,4621E+02	1,7310E+00	44	-1	0,005	-3,4329E+02	1,7164E+00	
42	9	0,005	3,4517E+02	1,7258E+00	46	-1	0,005	-3,3989E+02	1,6994E+00	
44	9	0,005	3,4329E+02	1,7164E+00	48	-1	0,005	-3,2234E+02	1,6117E+00	
46	9	0,005	3,3989E+02	1,6994E+00	50	-1	0,005	-1,4061E+02	7,0303E-01	
48	9	0,005	3,2234E+02	1,6117E+00	10	6	0,002	3,2952E-02	6,5905E-05	
50	9	0,005	1,4061E+02	7,0303E-01	12	6	0,002	7,2645E-02	1,4529E-04	
10	8	0,004	1,0778E+02	4,3112E-01	14	6	0,002	7,5387E-02	1,5077E-04	
12	8	0,004	1,9467E+02	7,7870E-01	16	6	0,002	7,5799E-02	1,5160E-04	
14	8	0,004	1,7903E+02	7,1613E-01	18	6	0,002	7,6349E-02	1,5270E-04	
16	8	0,004	1,7548E+02	7,0191E-01	20	6	0,002	7,6843E-02	1,5369E-04	
18	8	0,004	1,7394E+02	6,9576E-01	22	6	0,002	7,7216E-02	1,5443E-04	
20	8	0,004	1,7313E+02	6,9250E-01	24	6	0,002	7,7473E-02	1,5495E-04	
22	8	0,004	1,7272E+02	6,9088E-01	26	6	0,002	7,7637E-02	1,5527E-04	
24	8	0,004	1,7251E+02	6,9002E-01	28	6	0,002	7,7727E-02	1,5545E-04	
26	8	0,004	1,7239E+02	6,8957E-01	30	6	0,002	7,7756E-02	1,5551E-04	
28	8	0,004	1,7234E+02	6,8935E-01	32	6	0,002	7,7727E-02	1,5545E-04	
30	8	0,004	1,7232E+02	6,8929E-01	34	6	0,002	7,7637E-02	1,5527E-04	
32	8	0,004	1,7234E+02	6,8935E-01	36	6	0,002	7,7473E-02	1,5495E-04	
34	8	0,004	1,7251E+02	6,9002E-01	38	6	0,002	7,7216E-02	1,5443E-04	
36	8	0,004	1,7239E+02	6,8957E-01	40	6	0,002	7,6843E-02	1,5369E-04	
38	8	0,004	1,7272E+02	6,9088E-01	42	6	0,002	7,6349E-02	1,5270E-04	
40	8	0,004	1,7313E+02	6,9250E-01	44	6	0,002	7,5799E-02	1,5160E-04	
42	8	0,004	1,7394E+02	6,9576E-01	46	6	0,002	7,5387E-02	1,5077E-04	
44	8	0,004	1,7548E+02	7,0191E-01	48	6	0,002	7,2645E-02	1,4529E-04	
46	8	0,004	1,7903E+02	7,1613E-01	50	6	0,002	3,2952E-02	6,5905E-05	
48	8	0,004	1,9467E+02	7,7870E-01	10	2	0,002	-3,2952E-02	6,5905E-05	
50	8	0,004	1,0778E+02	4,3112E-01	12	2	0,002	-7,2645E-02	1,4529E-04	
10	0	0,004	-1,0778E+02	4,3112E-01	14	2	0,002	-7,5387E-02	1,5077E-04	
12	0	0,004	-1,9467E+02	7,7870E-01	16	2	0,002	-7,5799E-02	1,5160E-04	
14	0	0,004	-1,7903E+02	7,1613E-01	18	2	0,002	-7,6349E-02	1,5270E-04	
16	0	0,004	-1,7548E+02	7,0191E-01	20	2	0,002	-7,6843E-02	1,5369E-04	
18	0	0,004	-1,7394E+02	6,9576E-01	22	2	0,002	-7,7216E-02	1,5443E-04	
20	0	0,004	-1,7313E+02	6,9250E-01	24	2	0,002	-7,7473E-02	1,5495E-04	
22	0	0,004	-1,7272E+02	6,9088E-01	26	2	0,002	-7,7637E-02	1,5527E-04	
24	0	0,004	-1,7251E+02	6,9002E-01	28	2	0,002	-7,7727E-02	1,5545E-04	
26	0	0,004	-1,7239E+02	6,8957E-01	30	2	0,002	-7,7756E-02	1,5551E-04	
28	0	0,004	-1,7234E+02	6,8935E-01	32	2	0,002	-7,7727E-02	1,5545E-04	
30	0	0,004	-1,7232E+02	6,8929E-01	34	2	0,002	-7,7637E-02	1,5527E-04	
32	0	0,004	-1,7234E+02	6,8935E-01	36	2	0,002	-7,7473E-02	1,5495E-04	
34	0	0,004	-1,7239E+02	6,8957E-01	38	2	0,002	-7,7216E-02	1,5443E-04	
36	0	0,004	-1,7251E+02	6,9002E-01	40	2	0,002	-7,6843E-02	1,5369E-04	
38	0	0,004	-1,7272E+02	6,9088E-01	42	2	0,002	-7,6349E-02	1,5270E-04	
40	0	0,004	-1,7313E+02	6,9250E-01	44	2	0,002	-7,5799E-02	1,5160E-04	
42	0	0,004	-1,7394E+02	6,9576E-01	46	2	0,002	-7,5387E-02	1,5077E-04	
44	0	0,004	-1,7548E+02	7,0191E-01	48	2	0,002	-7,2645E-02	1,4529E-04	
46	0	0,004	-1,7903E+02	7,1613E-01	50	2	0,002	-3,2952E-02	6,5905E-05	
48	0	0,004	-1,9467E+02	7,7870E-01	Momento total				96,4920	
50	0	0,004	-1,0778E+02	4,3112E-01						
10	-1	0,005	-1,4061E+02	7,0303E-01					θ [rad]	0,19739556
12	-1	0,005	-3,2234E+02	1,6117E+00					K44 = M/θ	488,826